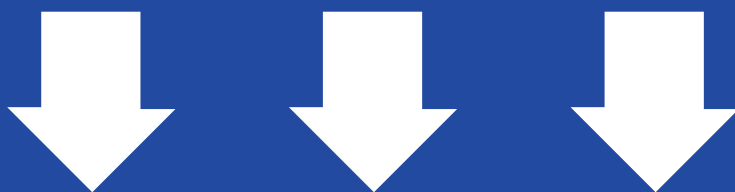


www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

Suites
arithmético-géométriques



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LA PISCINE D'ALICE

CORRECTION

1. Calculons U_1 et U_2 :

- Il s'agit de calculer U_1 .

$$U_1 = (1 - 4\%) U_0 + 2 \Leftrightarrow U_1 = 0,96 \times 75 + 2$$
$$\Rightarrow U_1 = 74 \text{ m}^3.$$

Ainsi, le volume d'eau dans la piscine (en m^3), 1 jour après la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage est de: 74.

- Il s'agit de calculer U_2 .

$$U_2 = (1 - 4\%) U_1 + 2 \Leftrightarrow U_2 = 0,96 \times 74 + 2$$
$$\Rightarrow U_2 = 73,04 \text{ m}^3.$$

Ainsi, le volume d'eau dans la piscine (en m^3), 2 jours après la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage est de: 73,04.

2. a. Justifions que la suite (U_n) n'est pas arithmétique:

D'après le cours, nous savons que (U_n) est une suite arithmétique ssi:

$$U_1 - U_0 = U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = \dots$$

Or ici: $U_1 - U_0 = -1$ et $U_2 - U_1 = -0,96$.

Donc: $U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$ car $-1 \neq -0,96$.

Ainsi: (U_n) n'est pas une suite arithmétique.

2. b. La suite (U_n) est-elle géométrique ?

D'après le cours, nous savons que (U_n) est une suite géométrique ssi:

$$\frac{U_1}{U_0} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \dots$$

Or ici: $\frac{U_1}{U_0} = 0,9866$ et $\frac{U_2}{U_1} = 0,9870$.

Donc: $\frac{U_1}{U_0} \neq \frac{U_2}{U_1}$ car $0,9866 \neq 0,9870$.

Ainsi: (U_n) n'est pas une suite géométrique.

3. Justifions que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = 0,96 \times U_n + 2$:

- D'après l'énoncé, le premier jour de la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage, la piscine contient 75 m^3 .

D'où: $U_0 = 75 \text{ m}^3$.

- De plus, chaque jour, il y a une évaporation de 4% et la piscine se remplit automatiquement avec un apport de 2 m^3 d'eau.

- Soient:
- U_{n+1} , le volume d'eau dans la piscine (en m^3), $(n+1)$ jours après la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage,
 - U_n , le volume d'eau dans la piscine (en m^3), (n) jours après la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage.

Pour tout entier n , le volume d'eau U_{n+1} est égal au volume d'eau U_n diminué de 4% et augmenté de 2 m^3 .

Donc pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = U_n - 4\% U_n + 2 \Leftrightarrow U_{n+1} = 0,96 U_n + 2.$$

4. a. Montrons que (V_n) est une suite géométrique de raison 0,96 et déterminons V_0 :

$$V_n = U_n - 50 \Leftrightarrow V_{n+1} = U_{n+1} - 50$$

$$\Leftrightarrow V_{n+1} = (0,96 U_n + 2) - 50 \quad (1).$$

$$\text{Or: } V_0 = U_0 - 50 \Rightarrow V_0 = 25 \text{ et } U_n = V_n + 50.$$

$$\text{Ainsi: } (1) \Leftrightarrow V_{n+1} = (0,96 [V_n + 50] + 2) - 50$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = 0,96 V_n.$$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,96$ et de premier terme $V_0 = 25$.

4. b. Pour tout entier naturel n , exprimons V_n en fonction de n :

Comme $V_{n+1} = 0,96 V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$V_n = V_0 \times (0,96)^n, \text{ avec: } V_0 = 25.$$

4. c. Déduisons-en que, pour tout entier naturel n , $U_n = 25 \times 0,96^n + 50$:

$$\text{Nous savons que: } * V_n = 25 \times (0,96)^n$$

$$* U_n = V_n + 50.$$

$$\text{D'où: } U_n = 25 \times 0,96^n + 50.$$

4. d. Déterminons la limite de la suite (U_n) et interprétons le résultat obtenu:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 25 \times (0,96)^n + 50$$

$$= 50 \text{ car: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (0,96)^n = 0, \text{ car: } 0,96 \in]0, 1[.$$

La suite (U_n) est donc convergente et converge vers 50 m^3 .

Cela signifie qu'au bout de n années (" n " très grand), la piscine ne contiendra plus que 50 m^3 d'eau.

5. a. Recopions et complétons les lignes L_5 et L_6 de cet algorithme:

Les lignes L_5 et L_6 complétées sont les suivantes:

- L_5 : Tant que $U \geq 65$
- L_6 : | U prend la valeur $0,96 \times U + 2$

5. b. Déterminons le résultat affiché à la sortie:

Nous avons le tableau suivant:

Valeur de n	0	1	2	...	12	13
Valeur de U	75	74	73,04		65,32	64,70

Nous nous arrêtons à l'étape $n = 13$ car c'est à partir de cette étape que le volume d'eau dans la piscine sera inférieur à 65 m^3 .

En effet: $64,70 \text{ m}^3 < 65 \text{ m}^3$.

Ainsi, la valeur affichée en sortie de cet algorithme est: $n = 13$.

5. c. Déterminons combien de jours le niveau de l'eau est suffisant si on conserve ce réglage:

Il s'agit de déterminer " n " tel que: $U_n < 65$.

$$U_n < 65 \Leftrightarrow 25 \times (0,96)^n + 50 < 65$$

$$\Leftrightarrow 25 \times (0,96)^n < 15$$

$$\Leftrightarrow (0,96)^n < 0,6$$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,96) < \ln(0,6)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,6)}{\ln(0,96)}, \text{ car: } 0,96 \in]0,1[, \text{ et donc: } \ln(0,96) < 0$$

$$\Rightarrow n > 12,513$$

$$\Rightarrow n \geq 13 \text{ car } n \text{ est un entier naturel.}$$

Ainsi, en conservant ce réglage, le niveau de l'eau de la piscine est suffisant pendant 13 jours.