

www.freemaths.fr

Maths

Complémentaires

Terminale

Suites
arithmético-géométriques



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LA MÉDIATHÈQUE

CORRECTION

1. a. Calculons a_1 et a_2 :

Il s'agit de calculer a_1 et a_2 .

$$\begin{aligned} \bullet a_1 &= (1 - 20\% *) a_0 + 400 \Leftrightarrow a_1 = 0,8 \times 2500 + 400 \\ &\Rightarrow a_1 = 2400 \text{ inscriptions.} \end{aligned}$$

(* : car $1 - 80\% = 20\%$ inscriptions en moins)

$$\begin{aligned} \bullet a_2 &= (1 - 20\%) a_1 + 400 \Leftrightarrow a_2 = 0,8 \times 2400 + 400 \\ &\Rightarrow a_2 = 2320 \text{ inscriptions.} \end{aligned}$$

Ainsi, en 2014 et 2015, il y aura respectivement: 2 400 inscriptions et, 2 320 inscriptions.

1. b. Justifions que, pour tout entier naturel, $a_{n+1} = 0,8 a_n + 400$:

• D'après l'énoncé, la médiathèque a enregistré 2 500 inscriptions en 2013.

D'où: $a_0 = 1500$.

• De plus, chaque année 20% des inscrits partent et 400 nouveaux adhérents s'inscrivent.

Soient: • a_{n+1} , le nombre d'inscrits à la médiathèque pendant l'année

(2013 + (n + 1)),

• a_n , le nombre d'inscrits à la médiathèque pendant l'année

(2013 + (n)).

Pour tout entier naturel n , le nombre d'inscrits " a_{n+1} " est égal au nombre d'inscrits " a_n " diminué de 20% et augmenté de 400 " nouveaux adhérents ".

Donc pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} = a_n - 20\% a_n + 400 \iff a_{n+1} = 0,8 a_n + 400.$$

2. a. Montrons que (V_n) est géométrique et déterminons V_0 et q :

$$\begin{aligned} V_n = a_n - 2000 &\iff V_{n+1} = a_{n+1} - 2000 \\ &\iff V_{n+1} = (0,8 a_n + 400) - 2000 \quad (1). \end{aligned}$$

$$\text{Or: } V_0 = a_0 - 2000 \implies V_0 = 500 \text{ et } a_n = V_n + 2000.$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi: } (1) &\iff V_{n+1} = (0,8 [V_n + 2000] + 400) - 2000 \\ &\implies V_{n+1} = 0,8 V_n \text{ ou } V_n = 500 \times (0,8)^n. \end{aligned}$$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $V_0 = 500$.

2. b. Déduisons-en que pour tout entier n , $a_n = 500 \times (0,8)^n + 2000$:

$$\begin{aligned} \text{Nous savons que: } &* V_n = 500 \times (0,8)^n \\ &* a_n = V_n + 2000. \end{aligned}$$

$$\text{D'où: } a_n = 500 \times (0,8)^n + 2000.$$

2. c. Déterminons la limite de (a_n) :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 500 \times (0,8)^n + 2000 \\ &= 2000 \text{ car: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (0,8)^n = 0, \text{ car: } 0,8 \in]-1, 1[. \end{aligned}$$

$$\text{Au total: } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2000 \text{ inscriptions.}$$

2. d. Que peut-on en déduire ?

Si le schéma d'inscriptions reste le même au cours des années à venir, alors dans n années (" n " très grand), il y aura: 2 000 adhérents à la médiathèque.

3. a. Expliquons ce que permet de calculer cet algorithme:

Cet algorithme permet le calcul de " k " tel que: $a_k < 2\,050$.

3. b. Résolvons $a_k < 2\,050$:

$$a_k < 2\,050 \Leftrightarrow 500 \times (0,8)^k + 2\,000 < 2\,050$$

$$\Leftrightarrow (0,8)^k < 0,1$$

$$\Leftrightarrow k \ln(0,8) < \ln(0,1)$$

$$\Leftrightarrow k > \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,8)}, \text{ car: } 0,8 \in]0,1[, \text{ et donc: } \ln(0,8) < 1$$

$$\Rightarrow k > 10,32.$$

Nous prendrons $k = 11$ ans car k est un entier naturel.

Ainsi, pendant 11 ans (de 2013 à 2024), le nombre d'inscrits sera strictement supérieur à 2050. Au delà, ce nombre sera inférieur à 2050.