

www.freemaths.fr

Maths

Complémentaires

Terminale

Suites
arithmético-géométriques



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. a. Estimons le nombre d'étudiants en juin 2017:

En septembre 2016, il y a $U_0 = 27500$ étudiants.

Or, 150 étudiants démissionnent entre le 1^{er} septembre et le 30 juin cad au cours de l'année universitaire.

Dans ces conditions, le nombre d'étudiants en juin 2017 est de:

$$27500 - 150.$$

Ainsi, le nombre d'étudiants en juin 2017 est de: 27350.

1. b. Estimons le nombre d'étudiants à la rentrée de septembre 2017:

D'après l'énoncé: " les effectifs constatés à la rentrée de septembre connaissent une augmentation de 4% par rapport à ceux du mois de juin qui précède ".

Il s'agit de calculer U_1 .

$$U_1 = (U_0 - 150) \times (1 + 4\%) \Leftrightarrow U_1 = 27350 \times 1,04$$

$$\Rightarrow U_1 = 28444 \text{ étudiants.}$$

Ainsi, le nombre d'étudiants à la rentrée de septembre 2017 est de:

$$U_1 = 28444.$$

2. Justifions que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = 1,04 U_n - 156$:

- D'après l'énoncé, en septembre 2016, il y a 27500 étudiants.

D'où: $U_0 = 27500$ étudiants.

- De plus, chaque année, entre septembre et juin, 150 étudiants démissionnent **et** les effectifs à la rentrée de septembre connaissent une augmentation de 4% par rapport à ceux du mois de juin qui précède.

Soient: • U_{n+1} , le nombre d'étudiants à la rentrée de septembre (2016 + (n+1)),
• U_n , le nombre d'étudiants à la rentrée de septembre (2016 + (n)).

Pour tout entier naturel n , le nombre d'étudiants U_{n+1} est égal au nombre d'étudiants U_n diminué de 150 étudiants **et** (le résultat $U_n - 150$) augmenté de 4%.

Donc pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = (U_n - 150) \times (1 + 4\%) \Leftrightarrow U_{n+1} = 1,04 U_n - 156.$$

3. Recopions et complétons les lignes L_5 , L_6 , L_7 et L_9 de l'algorithme:

Les lignes L_5 , L_6 , L_7 et L_9 complétées sont les suivantes:

- | | |
|-----------|------------------------------------|
| • L_5 : | Tant que $U \leq 33000$ faire |
| • L_6 : | n prend la valeur $n+1$ |
| • L_7 : | U prend la valeur $1,04 U - 156$ |
| • L_9 : | Afficher $2016 + n$ |

4. a. Recopions et complétons le tableau:

Le tableau complété est le suivant:

| | Initialisation | Étape 1 | Étape 2 | Étape 3 | Étape 4 | Étape 5 | Étape 6 |
|---------------|----------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Valeur de n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Valeur de U | 27500 | 28444 | 29426 | 30447 | 31509 | 32613 | 33762 |
| | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 |

Notons que l'établissement ne pourra pas accueillir plus de 33000 étudiants
(capacité maximale).

4. b. Donnons la valeur affichée en sortie de cet algorithme:

Nous nous arrêtons à l'étape 6 car c'est à partir de cette étape que l'établissement dépassera sa capacité maximale de 33000 étudiants.

En effet: **33762 étudiants > 33000 étudiants.**

Ainsi, la valeur affichée en sortie de cet algorithme est de:

$$2016 + " 6 " \text{ cad } 2022.$$

5. a. Montrons que la suite (V_n) est géométrique et déterminons V_0 et q :

$$V_n = U_n - 3900 \Leftrightarrow V_{n+1} = U_{n+1} - 3900$$

$$\Leftrightarrow V_{n+1} = (1,04 U_n - 156) - 3900 \quad (1).$$

$$\text{Or: } V_0 = U_0 - 3900 \Rightarrow V_0 = 23600 \text{ et } U_n = V_n + 3900.$$

$$\text{Ainsi: } (1) \Leftrightarrow V_{n+1} = (1,04 [V_n + 3900] - 156) - 3900$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = 1,04 V_n.$$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 1,04$ et de premier terme $V_0 = 23600$.

5. b. Déduisons-en que, pour tout entier n , $U_n = 23600 \times (1,04)^n + 3900$:

Nous savons que: * $V_n = 23600 \times (1,04)^n$ (d'après le cours)

$$* U_n = V_n + 3900.$$

D'où: $U_n = 23600 \times (1,04)^n + 3900$.

5. c. c1. Déterminons la limite de la suite (U_n) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 23600 \times (1,04)^n + 3900$$

$$= +\infty \quad \text{car: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (1,04)^n = +\infty, \quad \text{car: } 1,04 > 1.$$

La suite (U_n) est donc: *divergente (cad pas convergente)*.

5. c. c2. Interprétation du résultat:

Cela signifie qu'au bout de n années (" n " très grand), le nombre d'étudiants sera infini et explosera ainsi la capacité maximale de l'établissement.