

www.freemaths.fr

Maths

Complémentaires

Terminale

Suites
arithmético-géométriques



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

L'ASSOCIATION

CORRECTION

Partie A:

1. Déterminons une estimation du nombre d'adhérents au 1^{er} mars 2017:

Il s'agit de calculer U_2 .

$$U_2 = (1 - 25\%) U_1 + 12.$$

$$\begin{aligned} \text{Or: } U_1 &= (1 - 25\%) U_0 + 12 \iff U_1 = 0,75 \times 900 + 12 \\ &\Rightarrow U_1 = 687 \text{ adhérents.} \end{aligned}$$

$$\text{Dans ces conditions: } U_2 = 0,75 \times 687 + 12 \Rightarrow U_2 \approx 527 \text{ adhérents.}$$

Ainsi, le nombre d'adhérents de l'association à la date du 1^{er} mars 2017 est de:

527.

2. a. Montrons que (V_n) est une suite géométrique de raison 0,75:

$$\begin{aligned} V_n = U_n - 48 &\iff V_{n+1} = U_{n+1} - 48 \\ &\iff V_{n+1} = (0,75 U_n + 12) - 48 \quad (1). \end{aligned}$$

$$\text{Or: } V_0 = U_0 - 48 \Rightarrow V_0 = 852 \text{ et } U_n = V_n + 48.$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi: } (1) &\iff V_{n+1} = (0,75 [V_n + 48] + 12) - 48 \\ &\Rightarrow V_{n+1} = 0,75 V_n. \end{aligned}$$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,75$ et de premier terme $V_0 = 852$.

2. b. Précisons V_0 et exprimons V_n en fonction de n :

D'après la question précédente: $V_0 = 852$ adhérents.

Comme $V_{n+1} = 0,75 V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$V_n = V_0 \times (0,75)^n, \text{ avec: } V_0 = 852.$$

2. c. Déduisons-en que, pour tout entier naturel n , $U_n = 852 \times 0,75^n + 48$:

Nous savons que: * $V_n = 852 \times (0,75)^n$

$$* U_n = V_n + 48.$$

D'où: $U_n = 852 \times 0,75^n + 48$.

3. Déterminons au bout de combien de mois, la présidente démissionnera:

La présidente de l'association démissionnera si le nombre d'adhérents devient inférieur à 100 cad ssi: $U_n < 100$.

Il s'agit donc de déterminer " n " tel que: $U_n < 100$.

$$U_n < 100 \iff 852 \times 0,75^n + 48 < 100$$

$$\iff 852 \times 0,75^n < 52$$

$$\iff 0,75^n < 0,061$$

$$\iff n \ln(0,75) < n \ln(0,061)$$

$$\iff n > \frac{\ln(0,061)}{\ln(0,75)}, \text{ car: } 0,75 \in]0,1[, \text{ et donc: } \ln(0,75) < 0$$

$$\Rightarrow n > 9,72.$$

$\Rightarrow n \geq 10$ car n est un entier naturel.

Ainsi, 10 mois après le 1^{er} janvier 2017, le nombre d'adhérents deviendra inférieur à 100.

En d'autres termes, le 1^{er} novembre 2017, le nombre d'adhérents deviendra inférieur à 100.

Donc oui, la présidente démissionnera le 1^{er} novembre 2017.

Partie B:

1. Recopions et complétons l'algorithme de façon qu'il affiche le montant total des cotisations de 2017:

L'algorithme complété est le suivant:

Variables: ...

...

...

Initialisation: ...

...

Traitement: Pour N allant de 1 à 12:

Affecter à S la valeur $S + U \times 10$

Affecter à U la valeur $0,75 U + 12$

Fin pour

Sortie: S

2. Déterminons la somme totale des cotisations perçues par l'association pendant l'année 2017:

Soit S , la somme totale des cotisations perçues par l'association pendant l'année 2017.

$$S = (U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{10} + U_{11}) \times 10 \text{ €}.$$

$$\text{Or: } U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{10} + U_{11} = 852 (1 + 0,75 + (0,75)^2 + \dots + (0,75)^{10} + (0,75)^{11}) + 12 \times 48.$$

$$\begin{aligned} \text{Et, d'après le cours: } & (1 + 0,75 + (0,75)^2 + \dots + (0,75)^{10} + (0,75)^{11}) \\ &= \frac{1 - (0,75)^{12}}{1 - 0,75}. \end{aligned}$$

$$\text{Dans ces conditions: } S = \left(852 \left[\frac{1 - (0,75)^{12}}{0,25} \right] + 12 \times 48 \right) \times 10$$

$$\Rightarrow S = 38760,47 \text{ €}.$$

En conclusion, la somme totale des cotisations perçues par l'association pendant l'année 2017 est de: 38760,47 €.