Maths Complémentaires Terminale

Suites arithmético-géométriques

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CRÉDIT À LA CONSO !

CORRECTION

1. a. Démontrons que $U_1 = 5\,485,50$ €:

Il s'agit de calculer U_1.

$U_1 = (1 + 1,5\%)\ U_0 - 300 \iff U_1 = 1,015 \times 5\,700 - 300$

$\iff U_1 = 5\,785,50 - 300 \Rightarrow U_1 = 5\,485,50$ €.

Ainsi, le capital restant dû au 26 février 2016, juste après la première mensualité, est de: 5 485, 50 €.

1. b. Calculons U_2:

Il s'agit de calculer U_2.

$U_2 = (1 + 1,5\%)\ U_1 - 300 \iff U_2 = 1,015 \times 5\,485,50 - 300$

$\Rightarrow U_2 = 5\,267,78$ €.

Ainsi, le capital restant dû au 26 mars 2016, juste après la seconde mensualité, est de: 5 267, 78 €.

2. a. Recopions et complétons le tableau:

$U_{n+1} = 1,015\ U_n - 300$, d'où le tableau complété suivant:

Valeur de u	5 700	5 485, 50	5 267, 78	5 046, 80	4 822, 50	4 594, 84	4 363, 76
Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6
u > 4500	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

2. b. Déterminons la valeur affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme et interprétons:

La valeur affichée est: $n = 6$.

Cela signifie que le capital restant dû sera inférieur à 4500 € à partir du sixième mois de remboursement.

3. a. Montrons que (V_n) est géométrique, avec $V_{n+1} = 1,015 \times V_n$:

$$V_n = U_n - 20000 \iff V_{n+1} = U_{n+1} - 20000$$

$$\iff V_{n+1} = (1,015\, U_n - 300) - 20000 \quad (1).$$

Or: $V_0 = U_0 - 20000 \Rightarrow V_0 = -14300$ et $U_n = V_n + 20000$.

Ainsi: $(1) \iff V_{n+1} = (1,015\,[V_n + 20000] - 300) - 20000$

$$\Rightarrow V_{n+1} = 1,015\, V_n.$$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 1,015$ et de premier terme $V_0 = -14300$.

3. b. Déduisons-en que pour tout entier naturel n, $U_n = 20000 - 14300 \times 1,015^n$:

Comme $V_{n+1} = 1,015\, V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$V_n = V_0 \times (1,015)^n, \quad \text{avec:} \quad V_0 = -14300.$$

De plus, nous savons que:
* $V_n = -14300 \times (1,015)^n$
* $U_n = V_n + 20000.$

D'où: $U_n = -14300 \times (1,015)^n + 20000.$

OU BIEN: $U_n = 20000 - 14300 \times (1,015)^n.$

4. a. Déterminons le montant du capital restant dû au 26 avril 2017:

Cela revient à calculer U_{15} car le 25 avril 2017 a lieu le remboursement de la quinzième mensualité.

$U_{15} = 20000 - 14300 \times (1,015)^{15}$ => $U_{15} = 2\,121,68$€.

Ainsi, le capital restant dû au 26 avril 2017, juste après la quinzième mensualité, est de: $2\,121,68$€.

4. b. Déterminons le nombre de mensualités nécessaires pour rembourser intégralement le prêt:

Il s'agit de déterminer " n " tel que: $U_n = 0$.

$U_n = 0 \iff 20000 - 14300 \times 1,015^n = 0$

$\iff 1,015^n = 1,3986$

$\iff n \ln(1,015) = \ln(1,3986)$

$\iff n = \dfrac{\ln(1,3986)}{\ln(1,015)}$

$\Rightarrow n = 22,5321$.

Nous prendrons $n = 23$ mois car n est un entier naturel.

Cela signifie que le prêt sera intégralement remboursé après la 23ème mensualité cad le 26 janvier 2018.

4. c. Déterminons le montant de la dernière mensualité:

Nous devons calculer le montant de la 23ème mensualité.

Pour cela nous allons préalablement déterminer le capital restant dû, juste après le remboursement de la 22ème mensualité.

Il s'agit de calculer U_{22}.

$U_{22} = 20000 - 14300 \times 1,015^{22}$, cad: $U_{22} = 157,8391$€.

Ainsi, le capital restant dû le 26 décembre 2017 est de: 157, 8391 €.

Dans ces conditions, la 23ème mensualité, réglée le 25 janvier 2018 sera de:

$$M_{23} = 157,8391€ \times 1,015 \Rightarrow M_{23} = 160,2066€.$$

En conclusion, le montant de la dernière mensualité sera de: 160, 2066 €.

4. d. Déterminons le coût total de son achat:

Soit CT, le coût total de son achat.

$CT = 22 \times 300€^{1} + 160,2066€^{2} \Rightarrow CT = 6760,2066€.$

1 = 22 mensualités de 300 € ;

2 = 1 mensualité de 160, 2066 €.

Son coût total est donc d'un montant de: 6760, 2066 €.