

www.freemaths.fr

Maths

Complémentaires

Terminale

Suites
arithmético-géométriques



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie 1: Le modèle 1

1. Calculons U_1 et U_2 :

Ici, il s'agit de calculer U_1 et U_2 .

- $U_1 = q \times U_0 \Leftrightarrow U_1 = 1,63 \times 97$ cad: $U_1 \approx 158 \times 100$ chenilles.
- $U_2 = q \times U_1 \Leftrightarrow U_2 = 1,63 \times 158$ cad: $U_2 \approx 258 \times 100$ chenilles.

Ainsi, les valeurs respectives de U_1 et U_2 sont:

$$U_1 \approx 15800 \text{ chenilles et } U_2 \approx 25800 \text{ chenilles.}$$

2. Exprimons U_n en fonction de n , pour tout $n \in \mathbb{N}$:

D'après l'énoncé, (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,63$ et de premier terme $U_0 = 97$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous pouvons écrire: $U_n = 97 \times (1,63)^n$.

3. Justifions que la suite (U_n) est croissante:

- Comme:
- $U_0 = 97 > 0$
 - $q = 1,63 > 0$,

d'après le cours, nous pouvons affirmer que la suite (U_n) est strictement croissante pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Au total: la suite (U_n) est bien croissante pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Déterminons le nombre de chenilles le 13 juin 2018:

Le 13 juin 2018: $n = 12$ (car: le 2 juin, $n = 1$).

Dans ces conditions: $U_{12} = 97 \times (1,63)^{12}$ cad: $U_{12} \approx 34\,121 \times 100$ chenilles.

Au total, le nombre de chenilles le 13 juin 2018 sera d'environ: 3412100 chenilles.

Partie 2: Le modèle 2

1. Déterminons le nombre de chenilles le 13 juin 2018:

Selon le modèle 2: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \frac{1}{3} (-2809 \times (0,91)^n + 3100)$.

Or, ici il s'agit de calculer à nouveau U_{12} .

D'où: $U_{12} = \frac{1}{3} (-2809 \times (0,91)^{12} + 3100)$ cad: $U_{12} \approx 731 \times 100$ chenilles.

Ainsi, le nombre de chenilles le 13 juin 2018 sera d'environ: 73100 chenilles.

2. Montrons que la suite (V_n) est croissante:

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}: \quad V_{n+1} - V_n &= \frac{1}{3} (-2809 \times (0,91)^{n+1} + 3100) \\ &\quad - \frac{1}{3} (-2809 \times (0,91)^n + 3100) \\ &= \frac{1}{3} (-2809 \times [(0,91)^{n+1} - (0,91)^n]) \\ &= \frac{-2809}{3} [(0,91)^{n+1} - (0,91)^n]. \end{aligned}$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(0,91)^{n+1} - (0,91)^n < 0$, car: $0,91 \in]0; 1[$.

D'où: $V_{n+1} - V_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Au total, pour tout entier naturel n : la suite (V_n) est strictement croissante.

Partie 3: Comparaison

1. Déterminons le modèle le plus adapté:

Le 13 juin 2018, 74500 chenilles sont recensées dans le camping.

- Or:
- avec le modèle 1: 3412 100 chenilles estimé,
 - avec le modèle 2: 73 100 chenilles estimé.

Donc pas photo: nous retiendrons le modèle 2 car il est le plus adapté !

2. a. Résolvons l'inéquation $V_n \geq 1000$:

Nous allons déterminer ' n ' $\in \mathbb{N}$ tel que: $V_n \geq 1000$.

$$V_n \geq 1000 \Leftrightarrow \frac{1}{3} (-2809 \times (0,91)^n + 3100) \geq 1000$$

$$\Leftrightarrow 2809 \times (0,91)^n \geq 100$$

$$\Leftrightarrow n \cdot \ln(0,91) \leq \ln\left(\frac{100}{2809}\right)$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{100}{2809}\right)}{\ln(0,91)}, \text{ car: } 0,91 \in]0; 1[$$

$\Rightarrow n \geq 36$ jours, car n est un entier naturel.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n \geq 1000$ ssi: $n \geq 36$ jours.

2. b. Interprétons le résultat obtenu:

Cela signifie que 36 jours après le 1^{er} juin 2018, le nombre de chenilles dépassera les 100 000 individus !

Et plus exactement: le 7 juillet 2018.