

www.freemaths.fr

Maths

Complémentaires

Terminale

Suites
arithmético-géométriques



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. Déterminons le nombre de vélos au 1^{er} janvier 2016:

Il s'agit de calculer U_1 .

$$U_1 = (1 - 15\%) U_0 + 42 \iff U_1 = 0,85 \times 200 + 42$$

$$\implies U_1 = 216 \text{ vélos.}$$

Ainsi, au 1^{er} janvier 2016, il y aura: 216 vélos.

2. Justifions que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = 0,85 \times U_n + 42$:

- D'après l'énoncé, au 1^{er} janvier 2015, la commune disposait de 200 vélos.

D'où: $U_0 = 200$.

- De plus, chaque année leur nombre baisse de 15% et augmente de 40 nouvelles unités.

Soient: • U_{n+1} , le nombre de vélos au 1^{er} janvier (2015 + (n + 1)),

• U_n , le nombre de vélos au 1^{er} janvier (2015 + (n)).

Pour tout entier naturel n , le nombre U_{n+1} de vélos est égal au nombre U_n de vélos diminué de 15% et augmenté de 42 " nouveaux vélos. "

Donc pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = U_n - 15\% U_n + 42 \iff U_{n+1} = 0,85 U_n + 42$$

3. a. • Recopions et complétons le tableau en arrondissant à l'unité:

Le tableau complété est le suivant:

Valeur de U	200	212	222	231	238
Valeur de N	0	1	2	3	4
Condition $N < 4$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

• Déterminons le nombre obtenu à l'arrêt de l'algorithme:

Le nombre obtenu, à l'arrêt de l'algorithme, est: $U = 238$, pour $N = 4$.

3. b. Interprétons la valeur de U obtenue:

Cela signifie que la commune possédera 238 vélos en 2019 (2015 + 4).

4. a. Montrons que (V_n) est géométrique et déterminons V_0 et q :

$$\begin{aligned} V_n = U_n - 280 &\iff V_{n+1} = U_{n+1} - 280 \\ &\iff V_{n+1} = (0,85 U_n + 42) - 280 \quad (1). \end{aligned}$$

$$\text{Or: } V_0 = U_0 - 280 \implies V_0 = -80 \quad \text{et} \quad U_n = V_n + 280.$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi: } (1) &\iff V_{n+1} = (0,85 [V_n + 280] + 42) - 280 \\ &\implies V_{n+1} = 0,85 V_n. \end{aligned}$$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,85$ et de premier terme $V_0 = -80$.

4. b. Exprimons V_n en fonction de n :

Comme $V_{n+1} = 0,85 V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$V_n = V_0 \times (0,85)^n, \text{ avec: } V_0 = -80.$$

4. c. Déduisons-en que pour tout entier naturel n , $U_n = -80 \times (0,85)^n + 280$:

Nous savons que: * $V_n = -80 \times (0,85)^n$

* $U_n = V_n + 280.$

D'où: $U_n = -80 \times (0,85)^n + 280.$

4. d. Calculons la limite de (U_n) et interprétons:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -80 \times (0,85)^n + 280$$

$$= 280 \text{ car: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (0,85)^n = 0, \text{ car: } 0,85 \in]0, 1[.$$

- Donc:
- La suite (U_n) est convergente et converge vers 280 vélos.
 - Au bout de n années (" n " très grand), le nombre de vélos tendra vers 280 vélos.

5. Déterminons le coût total du 1^{er} janvier 2015 au 31 décembre 2019:

Soit CT , le coût total.

$$CT = 300 (U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4).$$

D'où: $CT = 300 (200 + 212 + 222 + 231 + 238),$

cad: $CT = 330\,900 \text{ €}.$

Ainsi le coût total du 1^{er} janvier 2015 au 31 décembre 2019 est

de: 330 900 €.