Maths Complémentaires Terminale

Suites arithmético-géométriques

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

AGRICULTURE BIO

CORRECTION

1. a. Justifions que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 0,96\ U_n + 22$:

• D'après l'énoncé, en 2018 il y a 300 pommiers par hectare.

D'où: $U_0 = 300$ pommiers.

• De plus, chaque année, Laurence:

- élimine 4% des pommiers existants,
- et, replante 22 nouveaux pommiers par hectare.

Soient: • U_{n+1}, le nombre de pommiers par hectare l'année $2018 + (n+1)$,

• U_n, le nombre de pommiers par hectare l'année $2018 + n$.

Pour tout entier naturel n, le nombre total de pommiers par hectare l'année $2018 + (n+1)$ est égal à celui U_n diminué de 4% et augmenté d'une quantité de 22 nouveaux pommiers.

Pour tout entier naturel n:

$$U_{n+1} = U_n - 4\% \times U_n + 22 \quad \text{cad:} \quad U_{n+1} = 0,96 \times U_n + 22.$$

Au total, nous avons bien: $U_{n+1} = 0,96 \times U_n + 22$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. b. Estimons le nombre de pommiers par hectare en 2020:

L'année 2020 correspond à: $n = 2$.

Il s'agit de calculer ici: U_2.

- $U_1 = U_0 - 4\% \times U_0 + 22 \iff U_1 = 300 - 4\% \times 300 + 22$

cad: $U_1 = 310$ pommiers.

- $U_2 = U_1 - 4\% \times U_1 + 22 \iff U_2 = 310 - 4\% \times 300 + 22$

cad: $U_2 = 320$ pommiers.

Ainsi, le nombre de pommiers par hectare en 2020 sera d'environ: 320.

2. a. Recopions et complétons l'algorithme pour qu'il détermine le rang de l'année cherchée:

L'algorithme recopié et complété est le suivant:

```
N ← 0
U ← 300
Tant que U < 400
    | N ← N + 1
    | U ← 0,96 x N + 22
Fin Tant que
```

2. b. Déterminons la valeur de " N " en sortie d'algorithme:

A l'aide d'une machine à calculer, nous obtenons: $N = 13$.

Ainsi, la valeur de " N " à la fin de l'exécution de l'algorithme est: $N = 13$.

3. a. Montrons que la suite (V_n) est géométrique de raison q et de premier terme V_0 que l'on précisera:

$V_n = U_n - 550 \iff V_{n+1} = U_{n+1} - 550$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$\iff V_{n+1} = (0,96 \times U_n + 22) - 550 \quad (1).$

Or: $V_0 = U_0 - 550 \Rightarrow V_0 = 300 - 550 = -250$ et $U_n = V_n + 550$.

Alors: $(1) \iff V_{n+1} = (0,96\,[V_n + 550] + 22) - 550$

$\Rightarrow V_{n+1} = 0,96\,V_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,96$ et de premier terme $V_0 = -250$.

3. b. b1. Pour tout entier naturel n, exprimons V_n en fonction de n:

Comme $V_{n+1} = 0,96\,V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = V_0 \times (0,96)^n$ cad: $V_n = -250 \times (0,96)^n$.

3. b. b2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrons que $U_n = -250 \times (0,96)^n + 550$:

Nous savons que pour tout $n \in \mathbb{N}$: * $V_n = -250 \times (0,96)^n$

* $U_n = V_n + 550$.

D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n = -250 \times (0,96)^n + 550$.

3. c. Estimons le nombre de pommiers de Laurence en 2025:

L'année 2025 correspond à: $n = 7$.

D'où, le nombre de pommiers pour 1 **hectare** en 2025 sera de:

$U_7 = -250 \times (0,96)^7 + 550$ soit: $U_7 \approx 362$ pommiers.

Or, il y a **14 hectares** dans la ferme, par conséquent le nombre total de pommiers en 2025 sera de: $362 \times 14 \approx 5070$.

Au total, le nombre de pommiers de Laurence en 2025 sera d'environ:

5070.

3. d. Résolvons l'inéquation $U_n > 400$:

Nous allons déterminer " n " $\in \mathbb{N}$ tel que: $U_n > 400$.

$U_n > 400 \iff -250 \times (0,96)^n + 550 > 400$

$\iff (0,96)^n < \dfrac{3}{5}$

$\iff n \cdot \ln(0,96) < \ln\left(\dfrac{3}{5}\right)$

$\iff n > \dfrac{\ln\left(\dfrac{3}{5}\right)}{\ln(0,96)}$, car: $0,96 \in]0;1[$

$\Rightarrow n > 13$ ans, car n est un entier naturel.

En conclusion: cela confirme bien le fait que 13 ans après l'année 2018, la densité de pommiers dépassera 400 pommiers par hectare.

Donc en 2031.