

www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

Limite d'une Suite



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

QUANTITÉ CONJUGUÉE

2

CORRECTION

1. Calculons la limite de la suite (U_n) en $+\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + an} - n \\ &= (+\infty) - (+\infty). \end{aligned}$$

Il s'agit d'une forme indéterminée.

Ayons recours à la technique de la quantité conjuguée pour contourner cette indétermination.

$$U_n = \sqrt{n^2 + an} - n \Leftrightarrow U_n = \frac{(\sqrt{n^2 + an} - n) \times (\sqrt{n^2 + an} + n)}{(\sqrt{n^2 + an} + n)}$$

$$\Leftrightarrow U_n = \frac{n^2 + an - n^2}{\sqrt{n^2 + an} + n}$$

$$\Leftrightarrow U_n = \frac{an}{\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{a}{n}\right)} + n}$$

Dans ces conditions: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{an}{n \times \sqrt{1 + \frac{a}{n}} + n}$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{an}{n \times \sqrt{1 + \frac{a}{n} + n}} \quad (|n| = n \text{ car } n > 0)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{an}{n+n} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{n} = 0 \right)$$

$$= \frac{a}{2}$$

Ainsi: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{a}{2}$.

2. Conclusions:

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{a}{2}$, qui est une limite finie, nous pouvons affirmer que:

la suite (U_n) est **convergente** et converge vers $\frac{a}{2}$.