Maths Complémentaires Terminale

Limite d’une Suite

CORRIGÉ DE L’EXERCICE

LA NATURE D'UNE SUITE (U_n) 2

CORRECTION

Préalablement, notons que déterminer la nature d'une suite revient à dire si la suite est convergente ou divergente.

1. Déterminons la nature de la suite (U_n):

Ici: $U_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n + \frac{5}{n^3}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n + \frac{5}{n^3}.$$

Or: • $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$ (car: $\frac{3}{5} \in]0; 1[$).

• $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{5}{n^3} = 0$.

Dans ces conditions: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0 + 0 = 0$.

En conclusion, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$, limite finie: la suite (U_n) est convergente et converge vers 0.

2. Déterminons la nature de la suite (U_n):

Ici: $U_n = \dfrac{-(\sqrt{3})^n}{\left(\dfrac{1}{e}\right)^n}$ <=> $U_n = -(\sqrt{3}e)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} -(\sqrt{3}e)^n.$$

Or: $\lim\limits_{n \to +\infty} -(\sqrt{3}e)^n = -\infty$ (car: $\sqrt{3}e > 1$).

Dans ces conditions: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$.

En conclusion, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$: la suite (U_n) est divergente.

3. Déterminons la nature de la suite (U_n):

Ici: $U_n = \dfrac{5^n}{4^{n+2}}$ <=> $U_n = \dfrac{1}{16} \times \left(\dfrac{5}{4}\right)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{16} \times \left(\frac{5}{4}\right)^n.$$

Or: $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{5}{4}\right)^n = +\infty$ (car: $\dfrac{5}{4} > 1$).

Dans ces conditions: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$.

En conclusion, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$: la suite (U_n) est divergente.