Maths Complémentaires Terminale

Triangle de Pascal

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

COEFFICIENTS BINOMIAUX 6

CORRECTION

1. Calculons $\binom{10}{3}$, $\frac{10}{3} \times \binom{9}{2}$ et concluons:

• $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10!}{3!\,(7)!}$.

• $\frac{10}{3} \times \binom{9}{2} = \frac{10}{3} \times \left[\frac{9!}{2!\,(9-2)!} \right] = \frac{10 \times 9!}{3 \times 2!\,(7)!}$

$= \frac{10!}{3!\,(7)!}$.

Ainsi, nous pouvons conclure que: $\binom{10}{3} = \frac{10}{3} \times \binom{9}{2}$.

2. Calculons $\binom{12}{4}$, $3 \times \binom{11}{3}$ et concluons:

• $\binom{12}{4} = \frac{12!}{4!\,(12-4)!} = \frac{12!}{4!\,(8)!}$.

$$\bullet\ 3 \times \binom{11}{3} = 3 \times \left[\frac{11!}{3!\,(11-3)!} \right] = \frac{12}{4} \times \left[\frac{11!}{3!\,(8)!} \right]$$

$$= \frac{12 \times 11!}{4 \times 3!\,(8)!}.$$

$$= \frac{12!}{4!\,(8)!}.$$

Ainsi, nous pouvons conclure que: $\binom{12}{4} = 3 \times \binom{11}{3}$.

3. **Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$, $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \times \binom{n-1}{k-1}$:**

Pour tout entier naturel n et entier naturel k, avec $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n) \times (n-1)!}{(k) \times (k-1)!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n}{k} \times \left[\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!} \right]$$

$$= \frac{n}{k} \times \binom{n-1}{k-1}.$$

Ainsi, pour tous entiers naturels n et k $(0 \leqslant k \leqslant n)$, nous avons toujours:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \times \left(\frac{n-1}{k-1} \right).$$