

www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

Espérance & Variance



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

JETONS NOIRS ET BLANCS

CORRECTION

1. Déterminons la loi de probabilité de X:

- Préalablement, notons que:
- l'urne contient 7 jetons noirs (N),
 - l'urne contient $(n - 7)$ jetons blancs (B),
 - l'urne contient au total n jetons.

Dans ces conditions: • $P(N_1) = \frac{7}{n}$,

• $P(B_1) = \frac{n-7}{n}$,

• $P_{N_1}(N_2) = \frac{7}{n} \times \frac{6}{n-1}$

• $P_{B_1}(B_2) = \frac{n-7}{n} \times \frac{n-7-1}{n-1}$,

• $P_{B_1}(N_2) = \frac{n-7}{n} \times \frac{7}{n-1}$,

• $P_{N_1}(B_2) = \frac{7}{n} \times \frac{n-7}{n-1}$.

Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de couleurs différentes obtenues lors d'un tirage.

- Les valeurs que peut prendre la variable aléatoire (v.a.) X sont:

1, 2.

Ainsi, $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs que peut prendre la v.a. X est:

$$X(\Omega) = \{1, 2\}.$$

- Nous avons: • $P(X=1) = P_{B_1}(B_2) + P_{N_1}(N_2)$

$$= \left[\binom{n-7}{n} \times \binom{n-8}{n-1} \right] + \left[\binom{7}{n} \times \binom{6}{n-1} \right]$$

$$= \frac{n^2 - 15n + 98}{n(n-1)};$$

- $P(X=2) = P_{B_1}(N_2) + P_{N_1}(B_2)$

$$= \left[\binom{n-7}{n} \times \binom{7}{n-1} \right] + \left[\binom{7}{n} \times \binom{n-7}{n-1} \right]$$

$$= \frac{28n - 196}{n(n-1)}.$$

Notons que: $P(X=1) + P(X=2) = 1$.

- La loi de probabilité de la v.a. X est donc:

x_i	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{n^2 - 15n + 98}{n(n-1)}$	$\frac{28n - 196}{n(n-1)}$

2. Calculons $E(X)$:

D'après le cours: $E(X) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) \times x_i$.

Ici: $E(X) = \frac{(n^2 - 15n + 98)}{n(n-1)} \times 1 + \frac{(28n - 196)}{n(n-1)} \times 2 = \frac{n^2 + 13n - 98}{n(n-1)}$.

3. Déduisons-en $V(X)$:

D'après le cours: $V(X) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) \times x_i^2 - [E(X)]^2$.

Ici: $V(X) = \left(\frac{n^2 - 15n + 98}{n(n-1)} \times 1^2 \right) + \left(\frac{28n - 196}{n(n-1)} \times 2^2 \right)$

$$- \left[\frac{n^2 + 13n - 98}{n(n-1)} \right]^2$$

$$= \left[\frac{n^2 + 97n - 686}{n(n-1)} \right] - \left[\frac{n^2 + 13n - 98}{n(n-1)} \right]^2$$