

www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

Arbres Pondérés



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

PARTIE GAGNÉE OU PERDUE ?

CORRECTION

1. Montrons que $p_2 = \frac{7}{16}$:

D'après l'énoncé, nous avons:

- $G_n =$ " la $n^{\text{ième}}$ partie est gagnée ".
- $\bar{G}_n =$ " la $n^{\text{ième}}$ partie est perdue ".

- $P_{\bar{G}_{n-1}} (G_n) = 25\%$

- $P_{\bar{G}_{n-1}} (\bar{G}_n) = 1 - 25\% = 75\%$.

- $P_{\bar{G}_{n-1}} (\bar{G}_n) = 50\%$

- $P_{\bar{G}_{n-1}} (G_n) = 1 - 50\% = 50\%$.

- $P(A_1) = p_1 = 25\%$

- $P(G_n) = p_n$

- $P(\bar{G}_n) = 1 - p_n$.

Il s'agit ici de calculer: $P(G_2)$.

L'événement $G_2 = (G_2 \cap G_1) \cup (G_2 \cap \bar{G}_1)$.

$$\begin{aligned} \text{D'où: } P(G_2) &= P(G_2 \cap G_1) + P(G_2 \cap \bar{G}_1) \\ &= P_{G_1}(G_2) \times P(G_1) + P_{\bar{G}_1}(G_2) \times P(\bar{G}_1). \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi: } P(G_2) = 25\% \times 25\% + 50\% \times 75\% \Rightarrow P(G_2) = 43,75\%.$$

$$\text{Au total, nous avons bien: } p_2 = 43,75\% \text{ ou } p_2 = \frac{7}{16}.$$

2. Montrons que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$:

Nous avons, pour tout entier naturel n non nul: $p_n = P(G_n)$ et $p_{n+1} = P(G_{n+1})$.

L'événement $G_{n+1} = (G_{n+1} \cap G_n) \cup (G_{n+1} \cap \bar{G}_n)$.

$$\begin{aligned} \text{D'où: } P(G_{n+1}) &= P(G_{n+1} \cap G_n) + P(G_{n+1} \cap \bar{G}_n) \\ &= P_{G_n}(G_{n+1}) \times P(G_n) + P_{\bar{G}_n}(G_{n+1}) \times P(\bar{G}_n). \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi: } P(G_{n+1}) = 25\% \times p_n + 50\% \times (1 - p_n)$$

$$\Rightarrow p_{n+1} = -25\% \times p_n + 50\% \text{ ou } p_{n+1} = -\frac{1}{4} \times p_n + \frac{1}{2}.$$

$$\text{Au total, pour tout entier naturel } n \text{ non nul: } p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}.$$

3. Quelle conjecture peut-on émettre ?

La conjecture que nous pouvons émettre sur la convergence de la suite (p_n) est:

" on pourrait, a priori, penser que la suite (p_n) converge vers $0,4$ ".

4. a. Montrons que (U_n) est une suite géométrique dont on donnera U_1 et la raison q :

Pour tout entier naturel n non nul:

$$U_n = p_n - \frac{2}{5} \Leftrightarrow U_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow U_{n+1} = \left(-\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{5} \quad (1).$$

Or: $U_1 = p_1 - \frac{2}{5} \Rightarrow U_1 = -\frac{3}{20}$ et $p_n = U_n + \frac{2}{5}$.

Ainsi: $(1) \Leftrightarrow U_{n+1} = \left(-\frac{1}{4}\left[U_n + \frac{2}{5}\right] + \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{5}$

$$\Rightarrow U_{n+1} = -\frac{1}{4}U_n.$$

Par conséquent (U_n) est bien une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{4}$ et de premier terme $U_1 = -\frac{3}{20}$.

4. b. Déduisons-en que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{2}{5} - \frac{3}{20} \left(-\frac{1}{4}\right)^{(n-1)}$:

- Comme $U_{n+1} = -\frac{1}{4}U_n$: $U_n = U_1 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{(n-1)}$, avec: $U_1 = -\frac{3}{20}$.

- Nous savons que: * $U_n = -\frac{3}{20} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{(n-1)}$

- * $p_n = U_n + \frac{2}{5}$.

D'où: $p_n = -\frac{3}{20} \left(-\frac{1}{4}\right)^{(n-1)} + \frac{2}{5}$, pour tout entier naturel n non nul.

4. c. Montrons que la suite (p_n) est convergente et interprétons le résultat: ⁴

Pour cela, nous allons calculer: $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{3}{20} \left(-\frac{1}{4}\right)^{(n-1)} + \frac{2}{5}$$

$$= \frac{2}{5} \text{ car: } \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{3}{20} \left(-\frac{1}{4}\right)^{(n-1)} = 0, \text{ car: } -\frac{1}{4} \in]-1; 0[.$$

Cela signifie que: au bout d'un grand nombre de parties, le joueur a environ

$$\frac{2}{5} = 40\% \text{ de chance de gagner une partie.}$$

Et de plus, cela valide la conjecture émise à la question 3.