www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

Arbres Pondérés

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LA BOUTEILLE

CORRECTION

1. a. Modélisation à l'aide d'un arbre pondéré:

D'après l'énoncé, nous avons:

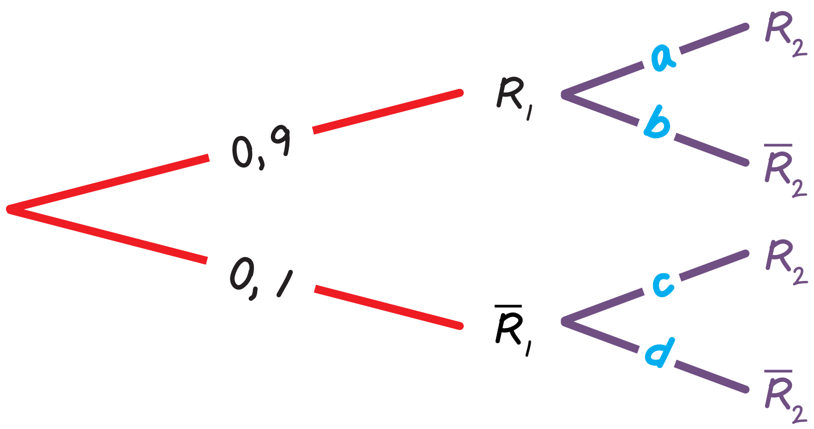
- R_1 = " le client rapporte la bouteille de son panier de la $1^{ère}$ semaine ".
- R_2 = " le client rapporte la bouteille de son panier de la $2^{è}$ semaine ".

- $P(R_1) = 0,9$
- $P(\overline{R_1}) = 0,1$.

- $P_{R_1}(R_2) = 0,95$
- $P_{R_1}(\overline{R_2}) = 1 - 0,95 = 0,05$.

- $P_{\overline{R_1}}(R_2) = 0,2$
- $P_{\overline{R_1}}(\overline{R_2}) = 1 - 0,2 = 0,8$.

D'où l'arbre pondéré suivant:



, avec :
- $a = 0,95$
- $b = 0,05$
- $c = 0,2$
- $d = 0,8$

1. b. Déterminons la probabilité que le client rapporte ses bouteilles du panier de la 1ère semaine et de la 2è semaine :

Ici, il s'agit de calculer : $P(R_1 \cap R_2)$.

$P(R_1 \cap R_2) = P_{R_1}(R_2) \times P(R_1)$.

Ainsi : $P(R_1 \cap R_2) = 0,95 \times 0,9$ cad : $P(R_1 \cap R_2) = 85,5\%$.

Au total, la probabilité que le client rapporte ses bouteilles du panier de la 1ère semaine et de la 2è semaine est de : 85,5%.

1. c. Montrons que la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la 2è semaine est égale à 0,875 :

Il s'agit donc de calculer : $P(R_2)$.

L'événement $R_2 = (R_2 \cap R_1) \cup (R_2 \cap \overline{R_1})$.

D'où : $P(R_2) = P(R_2 \cap R_1) + P(R_2 \cap \overline{R_1})$

$= P_{R_1}(R_2) \times P(R_1) + P_{\overline{R_1}}(R_2) \times P(\overline{R_1})$.

Ainsi : $P(R_2) = 0,855 + 0,2 \times 0,1$ cad : $P(R_2) = 0,875$.

Au total, la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la $2^{è}$ semaine est bien égale à : $0,875$.

1. d. Calculons $P_{R_2}(\overline{R}_1)$ en arrondissant à 10^{-3} :

$$P_{R_2}(\overline{R}_1) = \frac{P(R_2 \cap \overline{R}_1)}{P(R_2)}$$

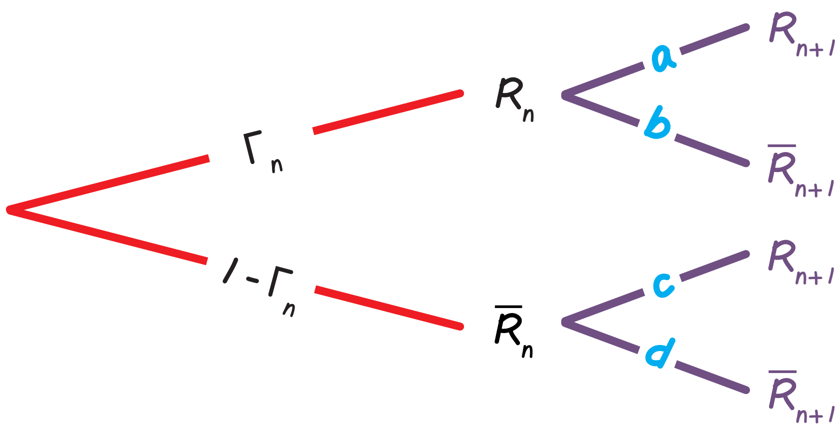
$$= \frac{P_{\overline{R}_1}(R_2) \times P(\overline{R}_1)}{P(R_2)}$$

Ainsi : $P_{R_2}(\overline{R}_1) = \dfrac{0,2 \times 0,1}{0,875}$ cad : $P_{R_2}(\overline{R}_1) \approx 0,023$.

Ainsi, la probabilité demandée est environ égale à : $2,3\%$.

2. a. Recopions et complétons l'arbre pondéré :

L'arbre pondéré recopié et complété est le suivant :



, avec :
- $a = 0,95$
- $b = 0,05$
- $c = 0,2$
- $d = 0,8$

.

2. b. Justifions que pour tout entier naturel n, $r_{n+1} = 0,75 \cdot r_n + 0,2$:

Il s'agit donc de calculer : $P(R_{n+1})$.

L'événement $R_{n+1} = (R_{n+1} \cap R_n) \cup (R_{n+1} \cap \overline{R}_n)$.

D'où: $P(R_{n+1}) = P(R_{n+1} \cap R_n) + P(R_{n+1} \cap \overline{R}_n)$

$$= P_{R_n}(R_{n+1}) \times P(R_n) + P_{\overline{R}_n}(R_{n+1}) \times P(\overline{R}_n).$$

Ainsi: $P(R_{n+1}) = 0,95 \times \Gamma_n + 0,2 \times (1 - \Gamma_n)$ **cad**: $P(R_{n+1}) = 0,75 \cdot \Gamma_n + 0,2.$

Au total, pour tout entier naturel n, nous avons: $\Gamma_{n+1} = P(R_{n+1}) = 0,75 \cdot \Gamma_n + 0,2.$