Maths Complémentaires Terminale

Primitives d'une fonction

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

TROUVER "a" ET "b" POUR QUE F' = f

CORRECTION

Déterminons "a" et "b" pour que F soit une primitive de f :

Ici: $f(x) = (x - 1)\, e^{-x}$ et $\mathcal{D}f = \mathbb{R}$.

Notons que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Elle admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$ cad une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que: $F' = f$.

Or, d'après l'énoncé, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $F(x) = (ax + b)\, e^{-x}$.

Vérifions que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $F'(x) = f(x)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $F'(x) = (a) \times (e^{-x}) + (ax + b) \times (-e^{-x})$ $[\, U' \times V + U \times V' \,]$

$$= ae^{-x} - axe^{-x} - be^{-x}$$

$$= (a - b)\, e^{-x} + (-a)\, xe^{-x}.$$

Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $F'(x) = f(x)$ ssi $\begin{cases} a - b = -1 \\ -a = 1 \end{cases}$

$(e^{x} \neq 0)$

cad $\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$.

Au total, F est bien une primitive de f ssi: $a = -1$ et $b = 0$.

Et, F s'écrit alors: $F(x) = -xe^{-x}$.