Maths Complémentaires Terminale

Primitives d’une fonction

CORRIGÉ DE L’EXERCICE

LA PRIMITIVE DE f QUI S'ANNULE EN $x = a$? 4

CORRECTION

1. Montrons que F est une primitive de f sur $\left[\frac{1}{e} ; 1\right]$:

Ici: $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x} \cdot \ln(x)$.

f est continue sur $\left[\frac{1}{e} ; 1\right]$.

Elle admet donc une primitive sur $\left[\frac{1}{e} ; 1\right]$ cad une fonction F dérivable sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e} ; 1\right]$ telle que: $F' = f$.

Or, d'après l'énoncé: $F(x) = 2\ln(x) + \frac{1}{2}[\ln(x)]^2$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in \left[\frac{1}{e} ; 1\right]$, nous avons:

$$F'(x) = 2 \times \left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2} \times \left[2 \times \ln(x) \times \frac{1}{x}\right] \quad \left[2 \times \frac{U'}{U} + \frac{1}{2} \times (n\, U^{(n-1)} \times U')\right]$$

$$= \frac{2}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$$

$= f(x).$

Ainsi: F est bien une primitive de f sur $\left[\frac{1}{e}; 1\right]$.

2. Déterminons la primitive de f qui s'annule en $a = \frac{1}{2}$:

Nous savons que toutes les primitives de f sur $\left[\frac{1}{e}; 1\right]$ sont de la forme:

$$G(x) = F(x) + c$$

$$= 2\ln(x) + \frac{1}{2}[\ln(x)]^2 + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Déterminer la primitive de f qui s'annule en $a = \frac{1}{2}$ revient à trouver le nombre réel " c " tel que: $G\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

$$G\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \iff 2\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 + c = 0$$

cad $c = -\left(2\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2\right)$.

La primitive de f qui s'annule en $a = \frac{1}{2}$ s'écrit alors:

$$F(x) = 2\ln(x) + \frac{1}{2}[\ln(x)]^2 + \left(-\left(2\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2\right)\right).$$