Maths Complémentaires Terminale

Intégrales par IPP

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

DOUBLE INTÉGRATION PAR PARTIES

4

CORRECTION

Calculons I à l'aide d'une IPP:

Ici: $I = \int_2^1 x\,(\ln x)^2\,dx.$

Soit $f(x) = x\,(\ln x)^2$. f est continue sur $[\,1\,;\,2\,]$. Elle admet donc des primitives sur $[\,1\,;\,2\,]$ et par conséquent I **existe**.

Ayons recours à une intégration par parties (**IPP**) pour le calcul de l'intégrale I.

Posons: • $u(x) = (\ln x)^2$, d'où $u'(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$

• $v'(x) = x$, d'où $v(x) = \dfrac{x^2}{2}$.

(u et v admettent des dérivées continues sur $[\,1\,;\,2\,]$)

Dans ces conditions: $I = [\,u(x) \times v(x)\,]_2^1 - \int_2^1 v(x) \times u'(x)\,dx$

$$= \left[\,(\ln x)^2 \times \left(\frac{x^2}{2}\right)\right]_2^1 - \int_2^1 \left(\frac{x^2}{2}\right) \times \left(\frac{2\ln x}{x}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} (\ln(x))^2 \right]_2^1 - \int_2^1 x \ln x \, dx$$

$$= -2 (\ln 2)^2 + \int_1^2 x \ln x \, dx.$$

Procédons à une seconde intégration par parties pour le calcul de:

$$J = \int_1^2 x \ln x \, dx.$$

Soit $g(x) = x \ln x$. g est continue sur [1; 2]. Elle admet donc des primitives sur [1; 2] et par conséquent **J existe**.

Posons: • $u(x) = \ln x$, d'où $u'(x) = \frac{1}{x}$

• $v'(x) = x$, d'où $v(x) = \frac{x^2}{2}$.

Dans ces conditions: $J = \left[(\ln x) \times \left(\frac{x^2}{2} \right) \right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} \right) \times \left(\frac{1}{x} \right) dx$

$$= (2 \ln 2) - \frac{1}{2} \int_1^2 x \, dx$$

$$= (2 \ln 2) - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2$$

$$= 2 \ln 2 - \frac{3}{4}.$$

Par conséquent: $I = -2 (\ln 2)^2 + \left(2 \ln 2 - \frac{3}{4} \right)$

$$= -2(\ln 2)^2 + 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

Au total, nous avons: $I = -2(\ln 2)^2 + 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$