Maths Complémentaires Terminale

Intégrales par IPP

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

DOUBLE INTÉGRATION PAR PARTIES

I

CORRECTION

Calculons I à l'aide d'une IPP:

Ici: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx.$

Soit $f(x) = x^2 \sin x$. f est continue sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$. Elle admet donc des primitives sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ et par conséquent I **existe**.

Ayons recours à une intégration par parties (IPP) pour le calcul de l'intégrale I.

Posons: • $u(x) = x^2$, d'où $u'(x) = 2x$

• $v'(x) = \sin x$, d'où $v(x) = -\cos x$.

(u et v admettent des dérivées continues sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$)

Dans ces conditions: $I = \Big[u(x) \times v(x) \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} v(x) \times u'(x) \, dx$

$= \Big[(x^2) \times (-\cos x) \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) \times (2x) \, dx$

$$= \Big[x^2 \cos x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cos x \, dx.$$

Procédons à une seconde intégration par parties pour le calcul de:

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cos x \, dx.$$

Soit $g(x) = 2x \cos x$. g est continue sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2} \right]$. Elle admet donc des primitives

sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2} \right]$ et par conséquent J **existe**.

Posons: • $u(x) = 2x$, d'où $u'(x) = 2$

• $v'(x) = \cos x$, d'où $v(x) = \sin x$.

Dans ces conditions: $J = \Big[(2x) \times (\sin x) \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x) \times (2) \, dx$

$$= 2 \Big[x \sin x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$$

$$= 2 \Big[x \sin x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \Big[-\cos x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi - 2.$$

Par conséquent: $I = -\Big[x^2 \cos x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (\pi - 2)$

$$= \pi - 2.$$

Au total, nous avons: $I = \pi - 2$.