

www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

Intégrale, Synthèse



ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

INTÉGRALES, SYNTHÈSE

Partie A

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $h(x) = xe^{-x}$.

1. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction h sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et dresser son tableau de variations.
3. L'objectif de cette question est de déterminer une primitive de la fonction h .
 - a. Vérifier que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, on a :

$$h(x) = e^{-x} - h'(x)$$

où h' désigne la fonction dérivée de h .

- b. Déterminer une primitive sur l'intervalle $[0; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto e^{-x}$.
- c. Dédire des deux questions précédentes une primitive de la fonction h sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Partie B

On définit les fonctions f et g sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = xe^{-x} + \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x+1).$$

On note C_f et C_g les représentations graphiques respectives des fonctions f et g dans un repère orthonormé.

Ces deux courbes sont tracées en annexe.

1. Pour un nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, on appelle M le point de coordonnées $(x; f(x))$ et N le point de coordonnées $(x; g(x))$: M et N sont donc les points d'abscisse x appartenant respectivement aux courbes C_f et C_g .
 - a. Déterminer la valeur de x pour laquelle la distance MN est maximale et donner cette distance maximale.
 - b. Placer sur le graphique fourni en annexe les points M et N correspondant à la valeur maximale de MN.
2. Soit λ un réel appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$. On note D_λ le domaine du plan délimité par les courbes C_f et C_g et par les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.
 - a. Hachurer le domaine D_λ correspondant à la valeur λ proposée sur le graphique en annexe.
 - b. On note A_λ l'aire du domaine D_λ , exprimée en unités d'aire. Démontrer que :

$$A_\lambda = 1 - \frac{\lambda+1}{e^\lambda}.$$

- c. Calculer la limite de A_λ lorsque λ tend vers $+\infty$ et interpréter le résultat.

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables : λ est un réel positif S est un réel strictement compris entre 0 et 1.
Initialisation : Saisir S λ prend la valeur 0
Traitement : Tant Que $1 - \frac{\lambda+1}{e^\lambda} < S$ faire λ prend la valeur $\lambda + 1$ Fin Tant Que
Sortie : Afficher λ

- a. Quelle valeur affiche cet algorithme si on saisit la valeur $S = 0,8$?
- b. Quel est le rôle de cet algorithme ?

ANNEXE

