Maths Complémentaires Terminale

Intégrale, Synthèse

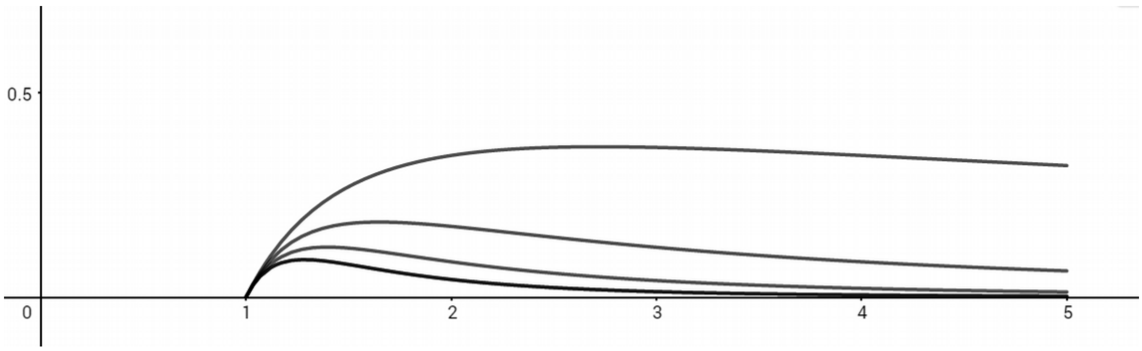
ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

INTÉGRALES, SYNTHÈSE

On considère, pour tout entier $n > 0$, les fonctions f_n définies sur l'intervalle $[1\ ;\ 5]$ par :

$$f_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^n}.$$

Pour tout entier $n > 0$, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.
Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes $\mathscr{C}_n$ pour n appartenant à $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$.



1. Montrer que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x de l'intervalle $[1\ ;\ 5]$:

$$f_n'(x) = \frac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}.$$

2. Pour tout entier $n > 0$, on admet que la fonction f_n admet un maximum sur l'intervalle $[1\ ;\ 5]$.
On note A_n le point de la courbe $\mathscr{C}_n$ ayant pour ordonnée ce maximum.
Montrer que tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation

$$y = \frac{1}{e}\ln(x).$$

3.a) Montrer que, pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle $[1\ ;\ 5]$:

$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{x^n}.$$

b) Montrer que pour tout entier $n > 1$:

$$\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right).$$

c) Pour tout entier $n > 0$, on s'intéresse à l'aire, exprimée en unités d'aire, sous la courbe $\mathscr{C}_n$, c'est-à-dire l'aire du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 1$, $x = 5$, $y = 0$ et la courbe $\mathscr{C}_n$.
Déterminer la valeur limite de cette aire quand n tend vers $+\infty$.