Maths Complémentaires Terminale

Intégrale, Synthèse

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

INTÉGRALES, SYNTHÈSE

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x^2}$.

1. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Indication : on pourra utiliser que pour tout réel x différent de 0, $f(x) = \frac{\mathrm{e}}{x} \times \frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$.

On admettra que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à 0.

2.

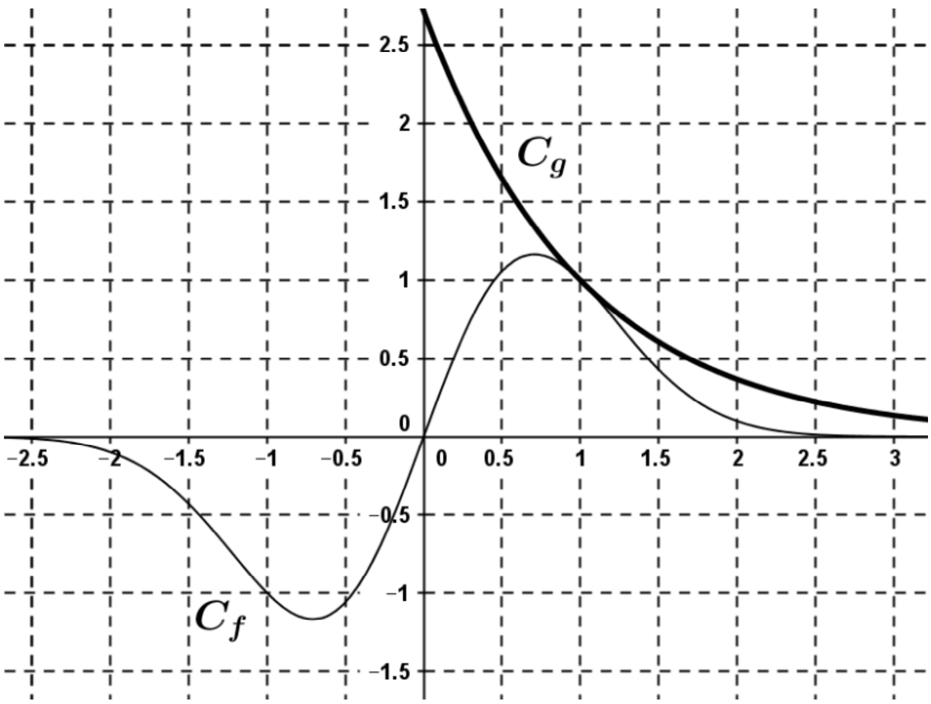
a. On admet que f est dérivable sur **R** et on note f' sa dérivée.
Démontrer que pour tout réel x,

$$f'(x) = (1 - 2x^2)\mathrm{e}^{1-x^2}.$$

b. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

Partie B

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = \mathrm{e}^{1-x}$.
Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère du plan les courbes représentatives C_f et C_g respectivement des fonctions f et g.



Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1. Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?
2. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]-\infty\,;\,0]$, $f(x) < g(x)$.
3. Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]0;+\infty[$.

   On pose, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.

   a. Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

   $$f(x) \leq g(x) \text{ équivaut à } \Phi(x) \leq 0.$$

   On admet pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.

   b. On admet que la fonction Φ est dérivable sur $]0;+\infty[$. Dresser le tableau de variations de la fonction Φ. (Les limites en 0 et $+\infty$ ne sont pas attendues.)

   c. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) \leq 0$.
4.

   a. La conjecture émise à la question **1.** de la partie B est-elle valide ?

   b. Montrer que C_f et C_g ont un unique point commun, noté A.

   c. Montrer qu'en ce point A, ces deux courbes ont la même tangente.

Partie C

1. Trouver une primitive F de la fonction f sur $\mathbf{R}$.
2. En déduire la valeur de $\int_0^1 \left(e^{1-x} - x e^{1-x^2}\right) dx$.
3. Interpréter graphiquement ce résultat.