

www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

Intégrale, Synthèse



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A: Cas général

1. Déterminons les variations de la vitesse de la goutte d'eau:

• Calculons V' :

Ici: • $V(t) = 9,81 \frac{m}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$

• $D_v = [0; +\infty[.$

V est dérivable sur $[0; +\infty[.$

Ainsi, nous pouvons calculer V' pour tout $t \in [0; +\infty[.$

Pour tout $t \in [0; +\infty[:$ $V'(t) = 9,81 \frac{m}{k} \left(\frac{k}{m} e^{-\frac{k}{m}t} \right)$

$$\Rightarrow V'(t) = 9,81 \times e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Au total, pour tout $t \in [0; +\infty[:$ $V'(t) = 9,81 \times e^{-\frac{k}{m}t} > 0.$

• Étudions le sens de variation de V sur $[0; +\infty[:$

Nous avons: • V est strictement croissante sur $[0; +\infty[.$

(car sur $[0; +\infty[$, $V'(t) > 0$)

2. La goutte ralentit-elle au cours de sa chute ?

La goutte ne ralentit pas au cours de sa chute car V est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, ce qui signifie que la vitesse instantanée verticale augmente au cours de la chute de la goutte.

3. Montrons que $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = 9,81 \frac{m}{k}$:

Il s'agit ici de calculer: $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(9,81 \frac{m}{k} - \frac{9,81 m}{e^{\frac{k}{m}t}} \right)$.

Or, d'après le cours: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{9,81 m}{e^{\frac{k}{m}t}} = 0$ (Théorème des croissances comparées).

Ainsi: $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = 9,81 \frac{m}{k}$.

Au total, nous avons bien: $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = 9,81 \frac{m}{k}$.

4. L'affirmation est-elle correcte ?

Soient: $\bullet V_{\max}$, la vitesse limite de la goutte, avec: $V_{\max} = 9,81 \frac{m}{k}$,
 $\bullet V_G$, la vitesse de la goutte quand $t = \frac{5 m}{k}$, avec: $V_G = 9,81 \frac{m}{k} (1 - e^{-5})$.

Nous avons: $V_G = 9,81 \frac{m}{k} \times (0,9932)$

$$= V_{\max} \times (0,9932)$$

$$\Rightarrow V_G = 99,32\% \times V_{\max} > 99\% \times V_{\max}$$

Au total: oui, la vitesse de la goutte dépasse 99% de sa vitesse limite.

Partie B: Cas particulier

1. Déterminons depuis combien de temps la goutte s'est détachée de son nuage:

Il s'agit ici de résoudre l'équation: $V(t) = 15 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

$$V(t) = 15 \Leftrightarrow 9,81 \times \left(\frac{6}{3,9}\right) \times \left(1 - e^{-\left(\frac{3,9}{6}\right) \times t}\right) = 15$$

$$\Leftrightarrow 15,09 \times e^{-0,65 \times t} = 0,09$$

$$\Leftrightarrow -0,65 \times t \approx \ln(0,006)$$

$$\Rightarrow t \approx 7,87 \text{ secondes.}$$

Au total, le temps écoulé depuis que la goutte s'est détachée de son nuage est d'environ: 7,87 secondes ou 7,8 secondes (au dixième de seconde).

2. Déduisons-en la vitesse moyenne de cette goutte:

Soit "m", la vitesse moyenne de V sur [0; 7,87].

$$m \text{ est telle que: } m = \frac{1}{7,87 - 0} \int_0^{7,87} V(t) dt.$$

$$\text{Soit: } I = \int_0^{7,87} V(t) dt.$$

V est continue sur [0; 7,87], elle admet donc des primitives sur [0; 7,87] et par conséquent: I existe.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{7,87} 15,09 (1 - e^{-0,65 \times t}) dt \\ &= 15,09 \left[t + \frac{1}{0,65} e^{-0,65 \times t} \right]_0^{7,87} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I \approx 95,227.$$

D'où la vitesse moyenne de V sur $[0; 7,87]$ est:

$$m = \frac{I}{7,87 - 0} \Rightarrow m \approx 12,1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Au total, la vitesse moyenne de cette goutte est d'environ: $12,1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.