

www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

Intégrale, Synthèse



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. Déterminons une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$:

Ici: • $f(x) = ke^{-kx}$

• $Df = [0; +\infty[$.

Sur l'intervalle $[0; +\infty[$, la fonction F est une primitive de la fonction f ssi:

$$F'(x) = f(x).$$

Pour $x \in [0; +\infty[$, prenons: $F(x) = -e^{-kx}$.

F est bien une primitive de f sur $[0; +\infty[$ car:

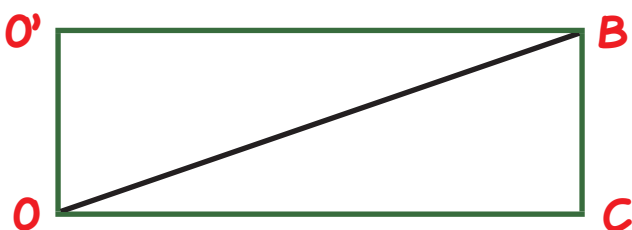
$$F'(x) = -(-k)e^{-kx} \iff F'(x) = ke^{-kx} \text{ cad: } F'(x) = f(x).$$

Ainsi, une primitive de la fonction f sur $[0; +\infty[$ est: $F(x) = -e^{-kx}$.

2. a. Exprimons l'aire du triangle OCB en fonction de k :

Le triangle OCB est rectangle en C.

L'aire du triangle OCB est égale à la moitié de l'aire du rectangle OO'BC, O' étant le point de coordonnées: $x_{O'} = 0$ et $y_{O'} = ke^{-0 \cdot k} = k$.



• $O(0; 0)$

• $O'(0; k)$

, avec: • $B(1; ke^{-k})$

• $C(1; 0)$

Or, l'aire du rectangle $OO'BC$ est: $\mathcal{A}_R = OC \times BC$
 $= 1 \times ke^{-k}$.

Dans ces conditions, l'aire du triangle OCB est: $\mathcal{A}_T = \frac{ke^{-k}}{2}$.

Au total, en fonction de k , l'aire du triangle OCB est: $\mathcal{A}_T = \frac{ke^{-k}}{2}$.

2. b. Exprimons, en fonction de k , l'aire du domaine \mathcal{D} :

L'aire du domaine \mathcal{D} délimité par l'axe des ordonnées, la courbe \mathcal{C}_f et le segment $[OB]$ est égale à:

$$\mathcal{A}_D = \left(\int_0^1 f(x) dx \right) - \mathcal{A}_T.$$

La fonction f est continue sur $[0; 1]$, elle admet donc des primitives sur $[0; 1]$

et par conséquent: $\int_0^1 f(x) dx$ existe.

$$\begin{aligned} \text{Ici: } \int_0^1 f(x) dx &= [F(x)]_0^1 \\ &= [-e^{-kx}]_0^1 \\ &= (-e^{-k}) - (-e^0) \\ &= 1 - e^{-k}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'aire du domaine \mathcal{D} est: $\mathcal{A}_D = (1 - e^{-k}) - \left(\frac{ke^{-k}}{2}\right)$

$$= \frac{2 - 2e^{-k} - ke^{-k}}{2}.$$

Au total, l'aire du domaine \mathcal{D} est: $\mathcal{A}_D = \frac{2 - 2e^{-k} - ke^{-k}}{2}$ u.a.

3. Montrons qu'il existe une unique valeur du réel $k > 0$ telle que l'aire du domaine \mathcal{D} vaut le double de celle du triangle OCB:

L'aire du domaine \mathcal{D} est égale au double de celle du triangle OCB quand:

$$\mathcal{A}_D = 2 \times \mathcal{A}_T.$$

$$\mathcal{A}_D = 2 \times \mathcal{A}_T \iff \frac{2 - 2e^{-k} - ke^{-k}}{2} = 2 \times \left(\frac{ke^{-k}}{2} \right)$$

$$\iff 2 - 2e^{-k} - ke^{-k} = 2ke^{-k}$$

$$\iff -3ke^{-k} - 2e^{-k} + 2 = 0.$$

Soit la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par: $g(k) = -3ke^{-k} - 2e^{-k} + 2$.

Il s'agit de montrer que l'équation $g(k) = 0$ admet une unique solution strictement positive que nous noterons: θ .

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

- Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.

Pour tout réel " w " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a; b]$ tel que: $f(c) = w$.

Cela signifie que: l'équation $f(x) = w$ admet au moins une solution appartenant à $[a; b]$.

- Si de plus, la fonction f est strictement "croissante" ou "décroissante" sur $[a; b]$, l'équation $f(x) = w$ admet une **unique** solution appartenant à $[a; b]$.

Ici: • g est continue sur $[0; +\infty[$, donc sur $]\frac{1}{3}; +\infty[$.

• " $w = 0$ " est compris entre: $g\left(\frac{1}{3}\right) \approx -0,15$

$$\text{et: } \lim_{k \rightarrow +\infty} g(k) = 2, \text{ car: } \lim_{k \rightarrow +\infty} e^{-k} = 0.$$

- g est strictement croissante sur $] \frac{1}{3}; +\infty [$ car pour tout $k \in] \frac{1}{3}; +\infty [$:

$$g'(k) = -e^{-k} + 3ke^{-k} > 0.$$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $g(k) = 0$ ($w = 0$) admet une **unique** solution θ appartenant à $] \frac{1}{3}; +\infty [$. **Donc** $\theta > 0$.

Au total: $g(k) = 0$ admet une unique solution θ sur $] \frac{1}{3}; +\infty [$ et elle est donc strictement positive.