

www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

Intégrale, Synthèse



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A: Étude de la fonction f

1. Justifions que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $-e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}$:

Ici: • $f(x) = e^{-x} (-\cos x + \sin x + 1)$

• $Df = \mathbb{R}$.

D'après le cours, nous savons que: • $\cos x \in [-1; 1]$,

• $\sin x \in [-1; 1]$.

Dans ces conditions: • $-1 \leq \cos x \leq 1$ ou: $-1 \leq -\cos x \leq 1$,

• $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Ainsi, nous avons: $-2 \leq -\cos x + \sin x \leq 2$

$$\Leftrightarrow -1 \leq -\cos x + \sin x + 1 \leq 3$$

$$\Leftrightarrow -e^{-x} \leq e^{-x} (-\cos x + \sin x + 1) \leq 3e^{-x}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Au total, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, nous avons bien: $-e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}$ (1).

2. Déduisons-en la limite de f en $+\infty$:

D'après le cours, nous savons que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$.

Ainsi: • $\lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{-x} = 0$ (terme de gauche de (I))

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3e^{-x} = 0$ (terme de droite de (I)).

D'où, d'après le théorème des gendarmes, nous pouvons affirmer que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Au total: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$

3. Calculons f' pour tout $x \in [-\pi; \pi]$:

Ici: • $f(x) = e^{-x} (-\cos x + \sin x + 1)$ (u x v)

• $Df = [-\pi; \pi]$.

Posons: $f = f_1 \times f_2$, avec: $f_1(x) = e^{-x}$ et $f_2(x) = -\cos x + \sin x + 1$.

f_1 est dérivable sur \mathbb{R} , comme fonction "exponentielle", donc dérivable sur $[-\pi; \pi]$.

f_2 est dérivable sur $[-\pi; \pi]$.

Par conséquent, f est dérivable sur $[-\pi; \pi]$ comme produit ($f_1 \times f_2$) de deux fonctions dérivables sur $[-\pi; \pi]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [-\pi; \pi]$.

Pour tout $x \in [-\pi; \pi]$:

$$f'(x) = (-e^{-x}) \times (-\cos x + \sin x + 1) + (e^{-x}) \times (\sin x + \cos x) \quad (u' \times v + u \times v')$$

$$= 2 e^{-x} \cos x - e^{-x}$$

$$= e^{-x} (2 \cos x - 1).$$

Au total, pour tout $x \in [-\pi; \pi]$: $f'(x) = e^{-x} (2 \cos x - 1)$.

4. a. Déterminons le signe de f' sur $[-\pi; \pi]$:

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [-\pi; \pi]$, sachant que: $e^{-x} > 0$.

• 1^{er} cas: $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \text{ ssi } e^{-x} (2 \cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{\pi}{3}$$

• 2^{ème} cas: $f'(x) < 0$.

$$f'(x) < 0 \text{ ssi } e^{-x} (2 \cos x - 1) < 0 \Leftrightarrow 2 \cos x - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \in [-\pi; -\frac{\pi}{3}] \cup [\frac{\pi}{3}; \pi]$$

• 3^{ème} cas: $f'(x) > 0$.

$$f'(x) > 0 \text{ ssi } e^{-x} (2 \cos x - 1) > 0 \Leftrightarrow 2 \cos x - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x > \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}[$$

4. b. Dédouisons-en les variations de f sur $[-\pi; \pi]$:

D'après les 3 cas précédents, nous pouvons en déduire que:

- f est décroissante sur $[-\pi; -\frac{\pi}{3}]$ et sur $[\frac{\pi}{3}; \pi]$,
- f est croissante sur $[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}]$.

Partie B: Aire du logo

1. Etudions la position relative de la courbe \mathcal{C}_f par rapport à la courbe \mathcal{C}_g sur \mathbb{R} :

Pour répondre à cette question, nous allons déterminer le signe de $f(x) - g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in \mathbb{R}: f(x) - g(x) &= e^{-x} (-\cos x + \sin x + 1) + e^{-x} \cos x \\ &= e^{-x} (\sin x + 1). \end{aligned}$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$: • $e^{-x} > 0$,

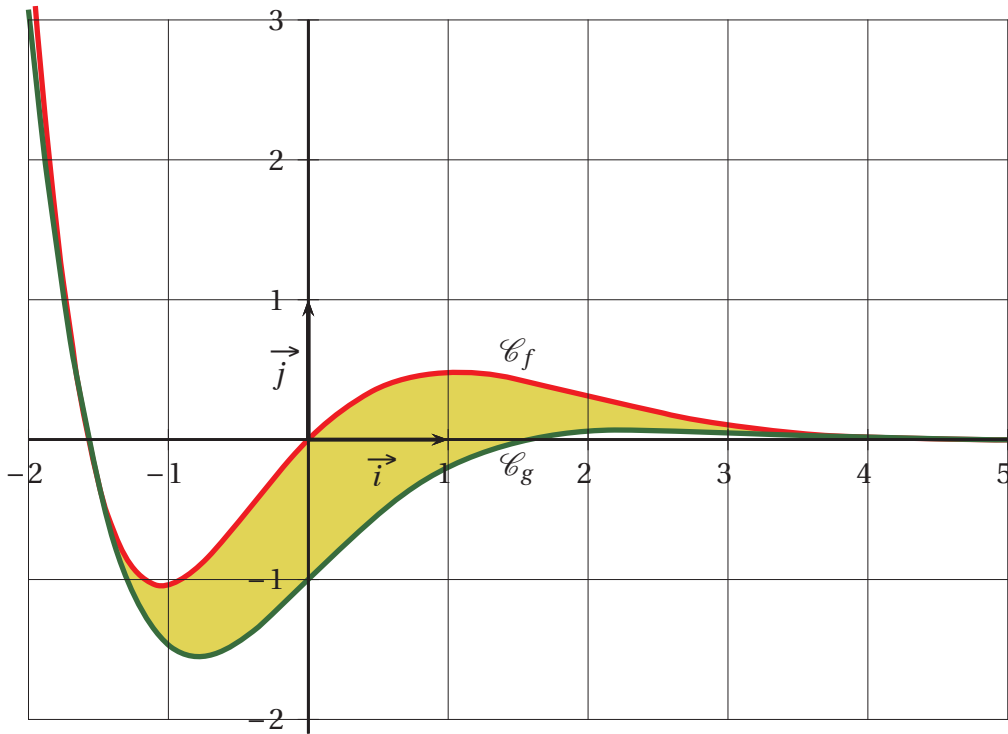
• $\sin x + 1 \geq 0$, car: $\sin x \in [-1; 1]$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^{-x} (\sin x + 1) \geq 0$ cad: $f(x) - g(x) \geq 0$.

Au total, comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - g(x) \geq 0$: la courbe \mathcal{C}_f est située au dessus de la courbe \mathcal{C}_g .

2. a. Hachurons le domaine \mathcal{D} sur le graphique fourni en annexe:

Le domaine \mathcal{D} hachuré en jaune est le suivant:



2. b. b1. Calculons l'aire du domaine \mathcal{D} :

L'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine \mathcal{D} correspond à:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (f(x) - g(x)) dx.$$

$$\text{Or: } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (f(x) - g(x)) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{-x} (\sin x + 1) dx$$

$$= [H(x)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= \left[\left(-\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1 \right) e^{-x} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{3\pi}{2}} \right).$$

Au total, la valeur exacte de l'aire du domaine \mathcal{D} est: $\frac{1}{2} \left(e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{3\pi}{2}} \right)$ u.a.

2. b. b2. Donnons une valeur approchée à 10^{-2} près en cm^2 de l'aire de \mathcal{D} :

En cm^2 et à 10^{-2} près, une valeur approchée du domaine \mathcal{D} est d'environ:

9,6 cm^2 .