

www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

Intégrale, Synthèse



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A: Étude de la fonction f

1. Montrons que $f'(x) = 2(-1 + e^{-2x+10})$:

Ici: • $f(x) = -2x + 20 - e^{-2x+10}$
 • $Df = [3;13]$.

Posons: $f = f_1 + (-f_2)$, avec: $f_1(x) = -2x + 20$ et $-f_2(x) = -e^{-2x+10}$.

f_1 est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction polynôme, donc dérivable sur $[3;13]$.

f_2 est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction "exponentielle", donc dérivable sur l'intervalle $[3;13]$.

Par conséquent, f est dérivable sur $[3;13]$ comme somme de 2 fonctions dérivables sur $[3;13]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [3;13]$.

Pour tout $x \in [3;13]$: $f'(x) = -2 - (-2)e^{-2x+10}$
 $\Rightarrow f'(x) = 2(-1 + e^{-2x+10})$.

Au total: pour tout $x \in [3;13]$, $f'(x) = 2(-1 + e^{-2x+10})$.

2. a. Résolvons dans $[3;13]$, $f'(x) \geq 0$:

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2(-1 + e^{-2x+10}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-2x+10} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow -2x + 10 \geq \ln(1)$$

$$\Rightarrow x \leq 5.$$

Au total: $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [3;5]$.

2. b. b1. Déduisons-en le signe de f' sur $[3;13]$:

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout $x \in [3;13]$:

• 1^{er} cas: $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \text{ ssi: } x = 5.$$

• 2^{eme} cas: $f'(x) < 0$.

$$f'(x) < 0 \text{ ssi: } x \in]5;13].$$

• 3^{eme} cas: $f'(x) > 0$.

$$f'(x) > 0 \text{ ssi: } x \in [3;5[.$$

Au total: • f est croissante sur $[3;5]$, ou strictement croissante sur $[3;5[$,
• f est décroissante sur $[5;13]$, ou strictement décroissante sur $]5;13]$

2. b. b2. Dressons le tableau de variation de f sur $[3;13]$:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	3	5	13
f'	+	0	-
f			

- Avec:
- $a = f(3) \Rightarrow a = 14 - e^4 < 0$,
 - $b = f(5) \Rightarrow b = 10 - e^0 \Rightarrow b = 9$,
 - $c = f(13) \Rightarrow c = -6 - e^{-16} < 0$.

Au total, nous venons de dresser le tableau de variation de f sur $[3;13]$.

2. c. Calculons l'intégrale $\int_3^{13} f(x) dx$:

Ici, il s'agit de calculer: $I = \int_3^{13} f(x) dx$.

f est continue sur $[3;13]$, elle admet donc des primitives sur $[3;13]$ et par conséquent: I existe.

$$\begin{aligned} I &= \int_3^{13} (-2x + 20 - e^{-2x+10}) dx \\ &= [-x^2 + 20x + \frac{1}{2}e^{-2x+10}]_3^{13} \\ \Rightarrow I &= 40 + \frac{1}{2}e^{-16} - \frac{1}{2}e^4. \end{aligned}$$

En arrondissant à 10^{-3} près, nous obtenons:

$$I \approx 12,701 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

- Au total:
- la valeur exacte de I est: $40 + \frac{1}{2}(e^{-16} - e^4)$,
 - la valeur approchée de I est: $12,701$ à 10^{-3} près.

Partie B: Application

1. a. Déterminons le nombre de toboggans que l'usine doit produire pour obtenir un bénéfice maximal:

Nous avons vu à la question 2. b. b2. que la fonction f admet un maximum au point: $x_b = 5$.

Ainsi, le nombre de toboggans que l'usine doit produire pour obtenir un bénéfice maximal est: 500 toboggans.

1. b. Déterminons alors ce bénéfice maximal:

Pour cela, il suffit de remplacer x par "5" dans la fonction f .

Ainsi nous obtenons: $\text{Bénéfice}_{\max} = -2 \times 5 + 20 - e^{-2 \times 5 + 10}$

$\Rightarrow \text{Bénéfice}_{\max} \approx 9$ en milliers d'€.

Au total, le bénéfice maximal engendré par la vente de 500 toboggans est de: 9000 €.

2. Calculons le bénéfice moyen:

Le bénéfice moyen pour une production mensuelle comprise entre 300 et 1300 toboggans correspond à la valeur moyenne de la fonction f sur $[3;13]$.

Soit B_m , le bénéfice moyen de f sur $[3;13]$.

$$B_m \text{ est tel que: } B_m = \frac{1}{13-3} \int_3^{13} f(x) dx.$$

$$B_m = \frac{1}{13-3} \int_3^{13} f(x) dx \Leftrightarrow B_m = \frac{1}{10} \times 12,701$$

$$\Rightarrow B_m \approx 1,270 \text{ en milliers d'€.}$$

Au total, le bénéfice moyen est de: 1270 €.

Partie C: Rentabilité

Déterminons le nombre minimum et le nombre maximum de toboggans que l'usine doit fabriquer pour être rentable:

L'usine est rentable ssi: son bénéfice est positif

cad ssi: pour tout $x \in [3;13]$, $f(x) \geq 0$.

Pour répondre à cette question, nous allons dresser le tableau de la fonction f :

x	3	α	5	β	13
$f(x)$		0	b	0	c

Diagramme illustrant le tableau de la fonction f . Les points α et β sont les racines de la fonction. Les points a et c sont les valeurs de la fonction aux bornes 3 et 13 respectivement. Le point b est la valeur maximale de la fonction sur l'intervalle $[3;13]$.

Ainsi, $f(x) \geq 0$ ssi: $x \in [\alpha; \beta]$.

Par tâtonnement, on trouve: $\alpha \approx 3,74$ et $\beta \approx 9,99$.

Au total, pour avoir un bénéfice positif, l'usine doit fabriquer entre:

374 et 999 toboggans par mois.