

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Maths Complémentaires Terminale

Intégrale, Synthèse



**CORRIGÉ** DE L'EXERCICE

## CORRECTION

Partie A:

1. Encadrons chacune des solutions de l'équation  $f(x) = 0$  sur l'intervalle  $[0; 7]$ :

L'équation  $f(x) = 0$  admet deux solutions sur l'intervalle  $[0; 7]$ .

Soient  $x_1$  et  $x_2$  ces deux solutions.

Les deux encadrements (par 2 entiers consécutifs) des solutions  $x_1$  et  $x_2$  sont respectivement:  $[0; 1]$  et  $[2; 3]$ .

2. Donnons le maximum de  $f$  sur l'intervalle  $[0; 7]$  en précisant la valeur en laquelle il est atteint:

La fonction  $f$  atteint son maximum quand:  $x = 1$ .

Quand  $x = 1$ :  $f(1) \approx 14,8$ .

Au total:  $f$  est maximum quand  $x = 1$  et en ce point  $f_{\max} \approx 14,8$ .

3. Déterminons à quel intervalle appartient l'intégrale:

Ici:  $I = \int_1^3 f(x) dx$ .

En unités d'aire et à l'unité près, l'aire  $\mathcal{A} = I$  du domaine compris entre la courbe  $(\mathcal{C})$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = 1$  et  $x = 3$ , est telle que:  $18 < \mathcal{A} < 26$  (plus de 23 carreaux et moins de 26 carreaux, en comptant).

Au total, nous retiendrons l'intervalle:  $[18; 26]$ .

## Partie B:

1. Déterminons  $f'$  pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; 7]$ :

Ici: •  $f(x) = 2x e^{-x+3}$  (u x v)

•  $Df = [0; 7]$

•  $f$  est définie et dérivable sur l'intervalle  $[0; 7]$ .

Comme  $f$  est dérivable sur  $[0; 7]$ , nous pouvons calculer  $f'$ :

Pour tout  $x \in [0; 7]$ :  $f'(x) = 2x e^{-x+3} + 2x \times (-e^{-x+3})$  ( $u' \times v + u \times v'$ )

$$\Rightarrow f'(x) = e^{-x+3} \times (-2x + 2).$$

Au total, pour tout  $x \in [0; 7]$ :  $f'(x) = (-2x + 2) \times e^{-x+3}$ .

2. a. Étudions le signe de  $f'$  sur  $[0; 7]$  et dressons le tableau de variation de  $f$ :

Nous allons distinguer 3 cas pour tout  $x \in [0; 7]$ :

• 1<sup>er</sup> cas:  $f'(x) = 0$ .

$$f'(x) = 0 \text{ ssi } (-2x + 2) \times e^{-x+3} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + 2 = 0^*, \text{ cad: } x = 1.$$

• 2<sup>ème</sup> cas:  $f'(x) < 0$ .

$$f'(x) < 0 \text{ ssi } (-2x + 2) \times e^{-x+3} < 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + 2 < 0^*, \text{ cad: } x > 1 \text{ ou } x \in ]1; 7].$$

• 3<sup>ème</sup> cas:  $f'(x) > 0$ .

$$f'(x) > 0 \text{ ssi } (-2x + 2) \times e^{-x+3} > 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + 2 > 0^*, \text{ cad: } x < 1 \text{ ou } x \in [0; 1[.$$

(\*: car pour tout  $x \in [0; 7]$ ,  $e^{-x+3} > 0$ )

**Au total:** •  $f$  est croissante sur  $[0; 1]$ ,

(car sur  $[0; 1]$ ,  $f'(x) \geq 0$ )

•  $f$  est décroissante sur  $[1; 7]$ .

(car sur  $[1; 7]$ ,  $f'(x) \leq 0$ )

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

|      |   |   |     |     |     |
|------|---|---|-----|-----|-----|
| $x$  | 0 | 1 | 7   |     |     |
| $f'$ |   | + | 0   | -   |     |
| $f$  |   |   | $a$ | $b$ | $c$ |

*(Note: In the original image, arrows point from 'a' to 'b' and from 'b' to 'c' in the third row of the table.)*

Avec: •  $a = f(0) \Rightarrow a = 0$ ,

•  $b = f(1) \Rightarrow b = 2e^2 \quad (\approx 14,78)$ ,

•  $c = f(7) \Rightarrow c = 14e^{-4} \quad (\approx 0,26)$ .

**2. b. Calculons le maximum de  $f$  sur l'intervalle  $[0; 7]$ :**

Le maximum de  $f$  sur  $[0; 7]$  est atteint quand  $f'(x) = 0$ .

Or:  $f'(x) = 0$  quand  $x = 1$ .

Ainsi: le point  $A(1; 2e^2)$  est le maximum de  $f$  sur  $[0; 7]$ .

3. a. Justifions que l'équation  $f(x) = 10$  admet deux solutions  $\alpha$  et  $\beta$  sur l'intervalle  $[0; 7]$ :

Pour cela, nous allons dresser un nouveau tableau de variation:

|      |   |             |     |            |   |
|------|---|-------------|-----|------------|---|
| $x$  | 0 | $\alpha$    | 1   | $\beta$    | 7 |
| $f'$ |   | +           | 0   | -          |   |
| $f$  |   | $f(\alpha)$ | $b$ | $f(\beta)$ |   |

Diagramme illustrant la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; 7]$ . La fonction est représentée par une courbe qui part de  $a$  à  $x=0$ , monte jusqu'à un maximum  $b$  à  $x=1$ , puis descend jusqu'à  $c$  à  $x=7$ . Les points  $\alpha$  et  $\beta$  sont marqués sur l'axe des abscisses, avec des flèches indiquant que  $f(\alpha) = b$  et  $f(\beta) = c$ . Le signe de la dérivée  $f'$  est positif avant  $\alpha$  et négatif après  $\beta$ .

- Avec:
- $a = 0$ ,
  - $b \approx 14,78$ ,
  - $c \approx 0,26$ ,
  - $f(\alpha) = f(\beta) = 10$ .

Le nouveau tableau de variation nous montre qu'il existe bien deux solutions  $\alpha$  et  $\beta$  telles que:  $f(\alpha) = f(\beta) = 10$ .

Au total  $\alpha$  et  $\beta$  existent bien avec:  $\alpha \in [0; 1]$  et  $\beta \in [1; 7]$ .

3. b. Donnons une valeur approchée de  $\beta$  sachant que  $\alpha \approx 0,36$  à  $10^{-2}$  près:

Par tâtonnement, nous trouvons:  $\beta \approx 2,16$  à  $10^{-2}$  près.

Au total, à  $10^{-2}$  près:  $\alpha \approx 0,36 \in [0; 1]$  et  $\beta \approx 2,16 \in [1; 7]$ .

4. a. Justifions que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $[0; 7]$ :

Sur l'intervalle  $[0; 7]$ ,  $F$  est une primitive de  $f$  ssi:  $F'(x) = f(x)$ .

Ici:  $F(x) = (-2x - 2)e^{-x+3}$  (u x v).

$$\text{D'où: } F'(x) = -2x e^{-x+3} + (-2x - 2)x(-e^{-x+3}) \quad (u'xv + uxv')$$

$$\Rightarrow F'(x) = 2x x e^{-x+3}.$$

**Au total:**  $F$  est bien une primitive de  $f$  car  $F'(x) = f(x)$ .

#### 4. b. Calculons l'aire demandée:

$$\text{Ici, il s'agit de calculer: } \mathcal{A} = \int_1^3 f(x) dx.$$

$$\text{Nous avons: } \mathcal{A} = [F(x)]_1^3$$

$$\Rightarrow \mathcal{A} = -8 + 4e^2 \text{ u a. ou } \mathcal{A} \approx 21,55 \text{ u a}$$

**Au total, la valeur exacte de l'aire demandée est:**  $\mathcal{A} = -8 + 4e^2 \text{ u a}$

#### 5. a. Calculons la valeur moyenne du bénéfice:

Soit " $m$ ", la valeur moyenne de  $f$  sur  $[1; 3]$ .

$$m \text{ est telle que: } m = \frac{1}{3-1} \int_1^3 f(x) dx.$$

$$\text{Or: } \int_1^3 f(x) dx = \mathcal{A}.$$

$$\text{D'où la valeur moyenne du bénéfice est: } \frac{1}{3-1} \times \mathcal{A} \times 1000 \text{ €}.$$

**Au total, la valeur moyenne du bénéfice, à l'euro près est:**  $m = 10\,778 \text{ €}$ .

#### 5. b. Déterminons le nombre d'objets que l'entreprise devra vendre:

Pour atteindre l'objectif fixé, le nombre d'objets que doit vendre l'entreprise devra être compris entre  $\alpha$  et  $\beta$ .

**Ainsi, le nombre d'objets doit être compris entre:** 36 et 216.