Maths Complémentaires Terminale

Intégrale, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

INTÉGRALE, SYNTHÈSE 22

CORRECTION

Partie A: Étude graphique

1. Déterminons $f'(3)$:

Nous savons que la tangente à la courbe Cf, au point $x = 3$, passe par les points: A (3; 4) et B (4; 0).

Soit $y = ax + b$, l'équation de cette tangente.

" $a = f'(3)$ " est le coefficient directeur et est tel que:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \iff a = \frac{0 - 4}{4 - 3} \Rightarrow a = -4.$$

Au total, $f'(3)$ est tel que: $f'(3) = -4$.

2. Donnons le tableau de signe de f' sur l'intervalle $[0,7 ; 6]$:

Nous avons le tableau de signe de f' suivant:

x	0,7		1		2		6
f'		-	0	+	0	-	

Partie B: Étude théorique

1. Montrons que $f'(x) = (-2x^2 + 6x - 4)\, e^{-2x+6}$:

Ici: • $f(x) = (x^2 - 2x + 1)\, e^{-2x+6}$ **(u x v)**

• $Df = [\,0{,}7\,;\,6\,]$.

Posons: $f = f_1 \times f_2$, avec: $f_1(x) = x^2 - 2x + 1$ et $f_2(x) = e^{-2x+6}$.

f_1 est dérivable sur IR comme fonction polynôme, donc dérivable sur l'intervalle $[\,0{,}7\,;\,6\,]$.

f_2 est dérivable sur IR comme fonction exponentielle, donc dérivable sur l'intervalle $[\,0{,}7\,;\,6\,]$.

Par conséquent, f est dérivable sur $[\,0{,}7\,;\,6\,]$ comme produit $(f_1 \times f_2)$ de 2 fonctions dérivables sur $[\,0{,}7\,;\,6\,]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [\,0{,}7\,;\,6\,]$.

Pour tout $x \in [\,0{,}7\,;\,6\,]$:

$$f'(x) = (2x - 2) \times e^{-2x+6} + (x^2 - 2x + 1) \times (-2) \times e^{-2x+6} \quad \textbf{(u' x v + u x v')}$$

$$\Rightarrow \; f'(x) = (-2x^2 + 6x - 4)\, e^{-2x+6}.$$

Au total, pour tout $x \in [\,0{,}7\,;\,6\,]$: $f'(x) = (-2x^2 + 6x - 4)\, e^{-2x+6}$.

2. a. Étudions le sens de variation de f sur $[\,0{,}7\,;\,6\,]$:

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [\,0{,}7\,;\,6\,]$.

Préalablement déterminons les solutions de l'équation: $-2x^2 + 6x - 4 = 0$.

$\Delta = 4 > 0$, d'où 2 solutions: • $x' = \dfrac{-6-2}{-4} \Rightarrow x' = 2$,

• $x'' = \frac{-6+2}{-4} \Rightarrow x'' = 1.$

D'où les 3 cas:

• **1er cas**: $f'(x) = 0.$

$f'(x) = 0$ ssi $(-2x^2 + 6x - 4)\, e^{-2x+6} = 0$

$\Leftrightarrow (-2x^2 + 6x - 4) = 0$ (pour tout $x \in [\,0,7\,;\,6\,]$, $e^{-2x+6} > 0$)

cad: $x = 1$ ou $x = 2.$

• **2ème cas**: $f'(x) < 0.$

$f'(x) < 0$ ssi $(-2x^2 + 6x - 4)\, e^{-2x+6} < 0$

$\Leftrightarrow (-2x^2 + 6x - 4) < 0$ (pour tout $x \in [\,0,7\,;\,6\,]$, $e^{-2x+6} > 0$)

cad: $x \in [\,0,7\,;\,1\,[\, \cup \,]\,2\,;\,6\,].$

• **3ème cas**: $f'(x) > 0.$

$f'(x) > 0$ ssi $(-2x^2 + 6x - 4)\, e^{-2x+6} > 0$

$\Leftrightarrow (-2x^2 + 6x - 4) > 0$ (pour tout $x \in [\,0,7\,;\,6\,]$, $e^{-2x+6} > 0$)

cad: $x \in \,]\,1\,;\,2\,[.$

Au total: • f est décroissante sur $[\,0,7\,;\,1\,[\, \cup \,]\,2\,;\,6\,]$,

(car sur $[\,0,7\,;\,1\,] \cup [\,2\,;\,6\,]$, $f'(x) \leqslant 0$)

• f est croissante sur $[\,1\,;\,2\,]$.

(car sur $[\,1\,;\,2\,]$, $f'(x) \geqslant 0$)

2. b. Donnons le tableau de variation de f sur $[\,0,7\,;\,6\,]$:

Comme nous l'avons déjà dit: • f est décroissante sur $[\,0,7\,;\,1\,] \cup [\,2\,;\,6\,]$,

• f est croissante sur $[\,1\,;\,2\,]$.

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

x	$0,7$		1		2		6
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	a	$\searrow$	b	$\nearrow$	c	$\searrow$	d

Avec: • $a = f(0,7) \Rightarrow a = \ldots$,

• $b = f(1) \Rightarrow b = 0$,

• $c = f(2) \Rightarrow c = e^2$,

• $d = f(6) \Rightarrow d = 25$.

3. a. Déterminons le plus grand intervalle sur lequel f est concave:

Soit $[\,e\,;\,f\,]$, l'intervalle recherché.

Ici: • $f'(x) = (-2x^2 + 6x - 4)\, e^{-2x+6}$

• $f''(x) = g(x) = 2\,(2x^2 - 8x + 7)\, e^{-2x+6}$. (logiciel)

f est concave sur $[\,e\,;\,f\,]$ ssi: pour tout $x \in [\,e\,;\,f\,]$, $f''(x) \leq 0$.

Or le signe de f'' dépend du signe de: $2x^2 - 8x + 7$ (car $e^{-2x+6} > 0$).

Les racines de l'équation $2x^2 - 8x + 7 = 0$ sont donc:

$$x' = \frac{-\sqrt{2}+4}{2} \text{ et } x'' = \frac{\sqrt{2}+4}{2}. \quad \text{(logiciel)}$$

Dans ces conditions: $f''(x) \leqslant 0$ ssi $2x^2 - 8x + 7 \leqslant 0$,

cad: $x \in \left[\frac{-\sqrt{2}+4}{2} ; \frac{\sqrt{2}+4}{2}\right]$.

Au total: f est concave sur $[\,e ; f\,] = \left[\frac{-\sqrt{2}+4}{2} ; \frac{\sqrt{2}+4}{2}\right]$.

3. b. Déterminons les points d'inflexion de f:

Rappelons qu'en un point d'inflexion, la dérivée seconde s'annule et change de signe.

Or c'est le cas quand: $x = \frac{-\sqrt{2}+4}{2}$ et $x = \frac{\sqrt{2}+4}{2}$.

Au total, la courbe représentative de f admet 2 points d'inflexion:

$$A = \left(\frac{-\sqrt{2}+4}{2} ; f\left(\frac{-\sqrt{2}+4}{2}\right)\right) \text{ et } B\left(\frac{\sqrt{2}+4}{2} ; f\left(\frac{\sqrt{2}+4}{2}\right)\right).$$

3. c. Calculons la valeur exacte de I, puis la valeur arrondie à 10^{-1}:

Ici, il s'agit de calculer: $I = \int_3^5 f(x)\, dx$

$$\text{cad: } I = \int_3^5 (x^2 - 2x + 1)\, e^{-2x+6}\, dx.$$

f est continue sur $[\,3 ; 5\,]$, elle admet donc des primitives sur $[\,3 ; 5\,]$ et par conséquent: I existe.

$$I = \int_3^5 f(x)\, dx$$

$$= [\, F\,(x)]_3^5$$

$$= [\, \frac{1}{4}\,(-2x^2 + 2x - 1)\, e^{-2x+6}]_3^5 \quad \text{(logiciel)}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{13 - 41\, e^{-4}}{4} \quad \text{ou} \quad I \approx 3,1 \quad \text{(valeur arrondie à } 10^{-1}\text{)}.$$

Au total: $I = \dfrac{13 - 41\, e^{-4}}{4}$ (valeur exacte)

ou $I \approx 3,1$ (valeur arrondie à 10^{-1}).