Maths
Complémentaires
Terminale

Intégrale, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

INTÉGRALE, SYNTHÈSE 18

CORRECTION

Partie A:

1. Résolvons graphiquement et de façon approchée $f(x) = 3000$:

A l'aide du graphique: $f(x) = 3000$ quand $x = 6,4$.

(3 gros carrés et 2 petits carrés)

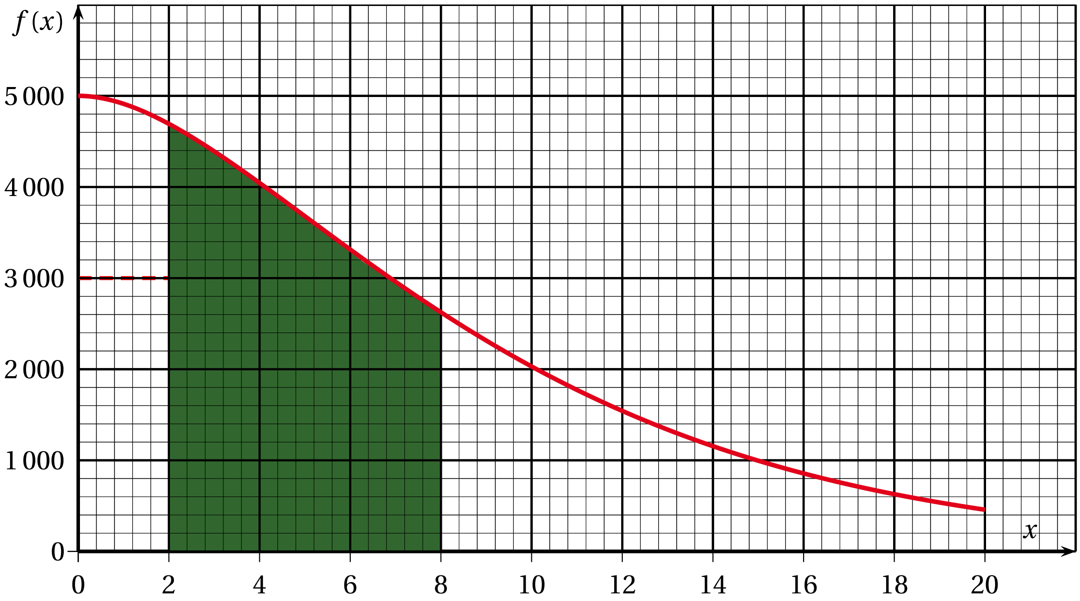
Graphiquement, l'équation $f(x) = 3000$ admet pour solution: $x = 6,4$.

2. Donnons graphiquement une valeur approchée de $\int_2^8 f(x)\,dx$:

$\int_2^8 f(x)\,dx$ correspond, en unités d'aire et à l'unité près, à l'aire du domaine compris entre la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 8$.

Soit $\mathcal{D}$ le domaine correspondant à $\int_2^8 f(x)\,dx$ sur le graphique.

Le domaine $\mathcal{D}$ est représenté par la surface verte sur le graphique suivant:



En comptant le nombre de carreaux, on obtient:

- 9 gros carreaux de 25 petits carreaux

+ • 46 petits carreaux.

Soit un total de: 271 petits carreaux.

Or, en unités d'aire, un petit carreau représente: $\frac{2 \times 1000}{25} = 80$.

Dans ces conditions: $271 \times 80 = 21680$ unités d'aire.

Au total, une valeur approchée de $\int_2^8 f(x)\, dx$ est: 21680 unités d'aire.

Partie B: Étude théorique

1. Démontrons que pour tout x de $[0 ; 20]$, $f'(x) = -200x\, e^{-0,2x}$:

Ici: • $f(x) = 1000\,(x+5)\, e^{-0,2x}$ ($u \times v$)

• $Df = [0 ; 20]$.

Posons: $f = f_1 \times f_2$, avec: $f_1(x) = 1000\,(x + 5)$ et $f_2(x) = e^{-0,2x}$.

f est dérivable sur $[\,0\,;\,20\,]$ car f_1 et f_2 sont dérivables sur $[\,0\,;\,20\,]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [\,0\,;\,20\,]$.

Pour tout $x \in [\,0\,;\,20\,]$:

$f'(x) = (1000) \times (e^{-0,2x}) + (1000\,(x + 5)) \times (-0,2e^{-0,2x})$ **($u' \times v + u \times v'$)**

$= -\,200x\,e^{-0,2x}$.

Au total, pour tout $x \in [\,0\,;\,20\,]$, nous avons bien: $f'(x) = -200x\,e^{-0,2x}$.

2. a. Déduisons-en le sens de variation de f sur $[\,0\,;\,20\,]$:

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [\,0\,;\,20\,]$:

- **1er cas**: $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0$ ssi $-200x\,e^{-0,2x} = 0$, cad: $x = 0$.

(pour tout $x \in I\!R$, $e^{-0,2x} > 0$)

- **2ème cas**: $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0$ ssi $-200x\,e^{-0,2x} < 0$, cad: $x \in \,]\,0\,;\,20\,]$.

(pour tout $x \in I\!R$, $e^{-0,2x} > 0$)

Au total: • f est décroissante sur $[\,0\,;\,20\,]$.

(car sur $[\,0\,;\,20\,]$, $f'(x) \leqslant 0$)

2. b. Dressons le tableau des variations de f sur $[\,0\,;\,20\,]$:

Le tableau des variations de f sur $[\,0\,;\,20\,]$ est le suivant:

x	0		20
f'	0	$-$	
f	a	$\searrow$	b

Avec: • $a = f(0) \Rightarrow a = 5000$,

• $b = f(20) \Rightarrow b = 25000\, e^{-4}$.

3. a. Montrons que sur $[0; 20]$, l'équation $f(x) = 3000$ admet une solution unique:

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

> • Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.
>
> Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a; b]$ tel que: $f(c) = K$.
>
> Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a; b]$.
>
> • Si de plus, la fonction f est strictement " croissante " ou " décroissante " sur $[a; b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une unique solution appartenant à $[a; b]$.

Ici: • f est continue sur $[0; 20]$, donc sur $]0; 20]$.

• " $k = 3000$ " est compris entre: $f(20) = 25000\, e^{-4}$

et: $f(0) = 5000$.

• f est strictement décroissante sur $]0; 20]$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = 3000$ ($k = 3000$) admet une unique solution α appartenant à $]\,0\,;\,20\,]$.

Au total: $f(x) = 3000$ admet exactement une solution unique α sur $]\,0\,;\,20\,]$.

3. b. Donnons une valeur approchée de α à l'aide de la calculatrice:

A l'aide d'une machine à calculer, nous trouvons comme valeur approchée de α:

$$\alpha \approx 6,88 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Au total: $\alpha \approx 6,88$ à 10^{-2} près, **avec**: $\alpha \in\,]\,0\,;\,20\,]$.

4. Calculons $\int_2^8 f(x)\,dx$:

Ici, il s'agit de calculer: $I = \int_2^8 f(x)\,dx$.

f est continue sur $[\,2\,;\,8\,]$, elle admet donc des primitives sur $[\,2\,;\,8\,]$ et par conséquent: I existe.

$$I = \int_2^8 f(x)\,dx$$

$$= [\,F(x)\,]_2^8$$

$$= [\,-5000 \times (x + 10)\,e^{-0,2x}\,]_2^8$$

$$= (\,-5000\,(18) \times e^{-1,6}) - (\,-5000 \times (12) \times e^{-0,4})$$

$$= -\,90000\,e^{-1,6} + 60000\,e^{-0,4}.$$

Au total: • Une valeur exacte de I est: $I = -\,90000\,e^{-1,6} + 60000\,e^{-0,4}$,

• Une valeur arrondie à l'unité de I est: $I \approx 22048$.

Partie C: Application économique

1. Déterminons en dessous de quel prix unitaire, la demande est supérieure à 3000 objets:

D'après l'énoncé: • $f(x)$ représente la quantité d'objets demandés,

• x correspond au prix unitaire d'un objet, en euros.

Dans ces conditions, la demande est supérieure à 3000 objets quand:

$$f(x) \geqslant 3000.$$

Or, d'après la question Partie B, **3. b.**, $f(x) \geqslant 3000$ dès que: $x \leqslant 6,88$.

(la fonction f est décroissante)

Au total: la demande est supérieure à 3000 objets dès que le prix unitaire passe en dessous de **6, 88 euros**.

2. Déterminons la valeur moyenne de la fonction f sur [2 ; 8] et interprétons:

Soit " **m** ", la valeur moyenne de f sur [2 ; 8].

m est telle que: $$\mathbf{m} = \frac{1}{8-2}\int_2^8 f(x)\,dx.$$

Or: $\int_2^8 f(x)\,dx \approx \mathbf{22048}$, d'après la question Partie B, **4**.

Ainsi, la valeur moyenne de f sur [2 ; 8] est: $$\frac{22048}{8-2} \approx \mathbf{3675}.$$

Cela signifie que: pour un prix unitaire compris entre 2 et 8 euros, la quantité demandée sera en moyenne de 3675 objets.