

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Maths Complémentaires Terminale

Intégrale, Synthèse



**CORRIGÉ** DE L'EXERCICE

## CORRECTION

Partie A:

1. Indiquons les valeurs de  $f(0)$  et  $f(2)$ :

- D'après l'énoncé:
- $A \in \mathcal{C}_f$  avec  $A(0; 2)$ ,
  - $B \in \mathcal{C}_f$  avec  $B(2; 0)$ ,
  - $C \notin \mathcal{C}_f$  avec  $C(-2; 0)$ .

- Dans ces conditions:
- $f(0) = f(x_A) = 2$ ,
  - $f(2) = f(x_B) = 0$ .

Ainsi:  $f(0) = 2$  et  $f(2) = 0$ .

2. Indiquons la valeur de  $f'(1)$ :

$f'(1) = 0$  car la tangente au point  $D(1; f(1))$  est parallèle à l'axe des abscisses. Et donc son coefficient directeur est nul.

Ainsi:  $f'(1) = 0$ .

3. Donnons une équation de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point A:

- D'après l'énoncé:
- la droite (AC) est tangente en A à la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

Donc la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point A passe par les points A (0; 2) et C (-2; 0).

Soit:  $y = ax + b$ , l'équation de cette tangente.

"  $a = f'(0) = f'(x_A)$  " est le coefficient directeur et est tel que:

$$a = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} \Leftrightarrow a = \frac{0 - 2}{-2 - 0} \text{ cad: } a = 1.$$

Ainsi:  $y = ax + b \Leftrightarrow y = x + b$  (1).

Or comme déjà dit, cette droite passe par le point A (0; 2).

D'où: (1)  $\Leftrightarrow 2 = 0 + b$  cad:  $b = 2$ .

Au total, l'équation de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point A est:  $y = x + 2$ .

4. Indiquons le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = 1$  dans  $[-10; 2]$ :

Graphiquement, nous constatons que  $f(x) = 1$  cad  $y = 1$  dans deux cas:

- quand  $x \approx -1, 2$ ,
- quand  $x \approx 1, 8$ .

Ainsi, le nombre de solutions dans l'intervalle  $[-10; 2]$  est égal à: 2.

5. Indiquons les variations de  $f$  sur  $[-10; 2]$ :

Sur l'intervalle  $[-10; 2]$ :

- $f$  est croissante sur  $[-10; 1]$ ,
- $f$  est décroissante sur  $[1; 2]$ .

Au total, les variations de  $f$  sur l'intervalle  $[-10; 2]$  sont:

- $f$  est croissante sur  $[-10; 1]$

•  $f$  est décroissante sur  $[1; 2]$ .

6. Déterminons l'intervalle sur lequel  $f$  est convexe et celui sur lequel  $f$  est concave:

Graphiquement, il semble que:

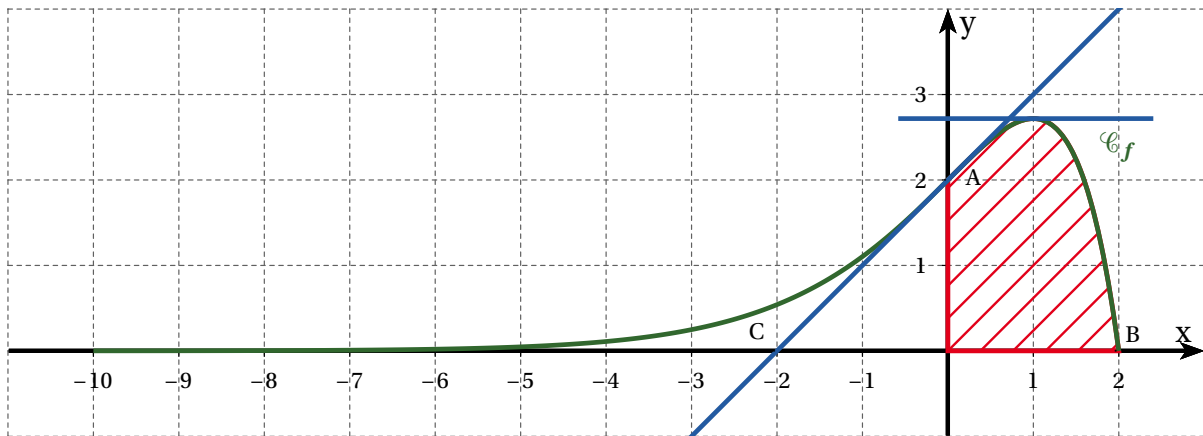
- $f$  est convexe sur  $[-10; 0]$ ,
- $f$  est concave sur  $[0; 2]$ .

Ainsi:

- $f$  est convexe sur l'intervalle  $[-10; 0]$ ,
- $f$  est concave sur l'intervalle  $[0; 2]$ .

7. a. Hachurons le domaine du plan dont l'aire est égale à  $I$ :

Le domaine du plan dont l'aire est égale à  $I = \int_0^2 f(x) dx$  est le suivant:



7. b. Donnons un encadrement du nombre  $I = \int_0^2 f(x) dx$  par deux entiers consécutifs:

En comptant le nombre de grands carreaux, il semble que:

$$4 \leq I \leq 5.$$

## Partie B:

1. a. Calculons  $f(0)$  et  $f(2)$ :

Ici: •  $f(x) = (2 - x)e^x$  ( $u \times e^v$ )

•  $Df = [-10; 2]$ .

Dans ces conditions: •  $f(0) = (2 - 0)e^0$  cad:  $f(0) = 2$ ,

•  $f(2) = (2 - 2)e^2$  cad:  $f(2) = 0$ .

Ainsi:  $f(0) = 2$  et  $f(2) = 0$ .

1. b. Calculons  $f'$  pour tout  $x \in [-10; 2]$ :

Ici,  $f$  est définie et dérivable sur  $[-10; 2]$ .

Ainsi, nous pouvons calculer  $f'$  pour tout  $x \in [-10; 2]$ .

Pour tout  $x \in [-10; 2]$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1) \times (e^x) + (2 - x) \times (e^x) && (u' \times v + u \times v' \times e^v) \\ &= (1 - x) \times e^x. \end{aligned}$$

Au total, pour tout  $x \in [-10; 2]$ :  $f'(x) = (1 - x) \times e^x$ .

1. c. Déduisons-en  $f'(1)$ :

Comme  $f'(x) = (1 - x)e^x$ , pour tout  $x \in [-10; 2]$ , nous avons:

$$f'(1) = 0.$$

Ainsi:  $f'(1) = 0$ .

2. Déterminons une équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse 0:

L'équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse 0

s'écrit:  $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$$= [(1 - 0) \times e^0] \times (x - 0) + 2$$

$$= x + 2.$$

**Au total:**  $y = x + 2$  est l'équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse 0.

3. a. Dressons le tableau des variations de  $f$  sur  $[-10; 2]$ :

$$f'(x) = (1 - x)e^x, \text{ pour tout } x \in [-10; 2].$$

Nous allons distinguer 2 cas pour tout  $x \in [-10; 2]$ :

• 1<sup>er</sup> cas:  $f'(x) \leq 0$ .

$$f'(x) \leq 0 \text{ ssi } 1 - x \leq 0 \text{ cad ssi: } x \geq 1 \text{ ou } x \in [1; 2].$$

( car pour tout  $x \in \mathbb{R}, e^x > 0$  )

• 2<sup>ème</sup> cas:  $f'(x) \geq 0$ .

$$f'(x) \geq 0 \text{ ssi } 1 - x \geq 0 \text{ cad ssi: } x \leq 1 \text{ ou } x \in [-10; 1].$$

( car pour tout  $x \in \mathbb{R}, e^x > 0$  )

**Ainsi:** •  $f$  est croissante sur  $[-10; 1]$ ,

•  $f$  est décroissante sur  $[1; 2]$ .

Nous pouvons donc dresser le tableau des variations suivant:

$x$	-10	1	2	
$f'$		+	0	-
$f$			$b$	
	$a$			$c$

Avec: •  $a = 12 e^{-10}$ ,

•  $b = e$ ,

•  $c = 0$ .

3. b. b1. Déduisons-en le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = 1$ , dans l'intervalle  $[-10; 2]$ :

Nous allons appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (TVI) pour répondre à cette question.

• Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$ .

Pour tout réel " $K$ " compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe au moins un réel " $c$ " de  $[a; b]$  tel que:  $f(c) = K$ .

Cela signifie que: l'équation  $f(x) = K$  admet au moins une solution appartenant à  $[a; b]$ .

• Si de plus, la fonction  $f$  est strictement "croissante" ou "décroissante" sur  $[a; b]$ , l'équation  $f(x) = K$  admet une **unique** solution appartenant à  $[a; b]$ .

Distinguons 2 cas:

**1<sup>er</sup> cas:**  $x \in [-10; 1]$ .

Dans ce cas: •  $f$  est continue sur  $[-10; 2]$ , donc sur  $[-10; 1]$ .

• " $k = 1$ " est compris entre:  $f(-10) = 12e^{-10} < 1$

et:  $f(1) = e > 1$ .

•  $f$  est strictement croissante sur  $[-10; 1[$ .

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, nous pouvons affirmer que l'équation  $f(x) = 1$  ( $k = 1$ ) admet une **unique** solution  $\alpha$  appartenant à  $[-10; 1[$ .

**2<sup>ème</sup> cas:**  $x \in [1; 2]$ .

Dans ce cas: •  $f$  est continue sur  $[-10; 2]$ , donc sur  $[1; 2]$ .

• " $k = 1$ " est compris entre:  $f(2) = 0 < 1$

et:  $f(1) = e > 1$ .

•  $f$  est strictement décroissante sur  $[1; 2[$ .

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, nous pouvons affirmer que l'équation  $f(x) = 1$  ( $k = 1$ ) admet une **unique** solution  $\beta$  appartenant à  $[1; 2[$ .

**Au total:** l'équation  $f(x) = 1$  admet exactement 2 solutions  $\alpha$  et  $\beta$  dans l'intervalle  $[-10; 2]$ .

3. b. b2. Donnons une valeur approchée de " $\alpha$ " et " $\beta$ " au centième près:

Une valeur approchée de  $\alpha$  est:  $\alpha \approx -1,15$ .

Une valeur approchée de  $\beta$  est:  $\beta \approx 1,84$ .



#### 4. Etudions la convexité de la fonction $f$ sur l'intervalle $[-10; 2]$ :

D'après le cours: •  $f$  est concave sur un intervalle  $I$  ssi:

$$\text{pour tout } x \in I, f''(x) \leq 0.$$

•  $f$  est convexe sur un intervalle  $I'$  ssi:

$$\text{pour tout } x \in I', f''(x) \geq 0.$$

Or ici:  $f'(x) = (1-x) \times e^x$ . (u x e<sup>v</sup>)

D'où:  $f''(x) = (-1) \times (e^x) + (1-x) \times (e^x)$ . (u' x v + u x v' x e<sup>v</sup>)

$$= -x e^x.$$

Dans ces conditions: •  $f''(x) \leq 0$  ssi:  $x \geq 0$  cad:  $x \in [0; 2]$ ,

•  $f''(x) \geq 0$  ssi:  $x \leq 0$  cad:  $x \in [-10; 0]$ .

(car pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^x > 0$ )

Ainsi: •  $f$  est convexe sur  $I' = [-10; 0]$ ,

•  $f$  est concave sur  $I = [0; 2]$ .

#### 5. a. Vérifions que $F$ est bien une primitive de $f$ sur $[-10; 2]$ :

Sur l'intervalle  $[-10; 2]$ ,  $F$  est une primitive de  $f$  ssi:  $F'(x) = f(x)$ .

Ici:  $F(x) = (3-x) e^x$ .

D'où pour tout  $x \in [-10; 2]$ :  $F'(x) = (3) \times (e^x) + (3-x) \times (e^x)$

$$= -x e^x = f(x).$$

Au total:  $F$  est bien une primitive de  $f$  sur  $[-10; 2]$ .

5. b. Déduisons-en une valeur exacte et une valeur approchée, à  $10^{-2}$  près,

$$\text{de } I = \int_0^2 f(x) dx:$$

$$\text{Ici: } I = \int_0^2 f(x) dx.$$

$$\text{D'où: } I = [F(x)]_0^2$$

$$= [(3-x)e^x]_0^2$$

$$= e^2 - 3$$

$$\approx 4,39.$$

Ainsi: • une valeur approchée de  $I$  est: 4,39,

• une valeur exacte de  $I$  est:  $e^2 - 3$ .