

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Maths Complémentaires Terminale

Intégrale, Synthèse



**CORRIGÉ** DE L'EXERCICE

## CORRECTION

### Partie A:

1. **a.** est la bonne réponse.

En effet, le coefficient directeur de la tangente  $T$  est négatif. Par conséquent les réponses  $c$  et  $d$  sont à éliminer.

De plus, la tangente passe par les points  $A$  et  $A'$  qui ont pour coordonnées respectives et approximatives:  $(-5; 1, 4)$  et  $(0; -0, 5)$ .

Dans ces conditions, le coefficient directeur "  $a$  " est tel que:

$$a \approx \frac{y_{A'} - y_A}{x_{A'} - x_A} \Leftrightarrow a \approx \frac{-0,5 - 1,4}{0 - (-5)} \text{ cad: } a \approx 0,38.$$

Au total: comme  $-0,38$  est proche de  $-\frac{1}{3}$ , nous retiendrons la réponse **a**.

2. **d.** est la bonne réponse.

En effet, comme la courbe  $C_f$  semble toujours être au-dessus de ses tangentes sur l'intervalle  $[-5; 5]$ , la fonction  $f$  semble convexe sur  $[-5; 5]$ .

Ainsi: comme  $f$  semble convexe sur  $[-5; 5]$ , nous retiendrons la réponse **d**.

3. **b.** est la bonne réponse.

En effet, en comptant de manière très approximative le nombre de grands carreaux, il semble que:  $4 \leq I \leq 7$ .

D'où: la réponse **b**.

## Partie B:

1. a. Montrons que  $f'(x) = 0,2x e^{0,2x}$ :

Ici: •  $f(x) = (x - 5) e^{0,2x} + 5$        $(u \times e^v + 5)$

•  $Df = [-10; 5]$ .

D'après l'énoncé,  $f$  est dérivable sur  $[-10; 5]$ .

Ainsi, nous pouvons calculer  $f'$  pour tout  $x \in [-10; 5]$ .

Pour tout  $x \in [-10; 5]$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1) \times (e^{0,2x}) + (x - 5) \times (0,2 e^{0,2x}) + 0 && (u' \times e^v + u \times v' \times e^v + 0) \\ &= 0,2x e^{0,2x}. \end{aligned}$$

Au total, pour tout  $x \in [-10; 5]$ :  $f'(x) = 0,2x e^{0,2x}$ .

1. b. Dressons le tableau de variation de  $f$  sur  $[-10; 5]$ :

Nous allons distinguer 2 cas pour tout  $x \in [-10; 5]$ :

• 1<sup>er</sup> cas:  $f'(x) \leq 0$ .

$$f'(x) \leq 0 \text{ ssi } 0,2x \leq 0 \text{ cad ssi: } x \leq 0 \text{ ou } x \in [-10; 0].$$

( car pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^{0,2x} > 0$  )

• 2<sup>ème</sup> cas:  $f'(x) \geq 0$ .

$$f'(x) \geq 0 \text{ ssi } 0,2x \geq 0, \text{ cad ssi: } x \geq 0 \text{ ou } x \in [0; 5].$$

( car pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^{0,2x} > 0$  )

- Au total:**
- $f$  est décroissante sur  $[-10; 0]$ ,
  - $f$  est croissante sur  $[0; 5]$ .

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $[-10; 5]$ :

$x$	-10	0	5
$f'$	-	0	+
$f$	$a$	$b$	$c$

Diagramme du tableau de variation : une flèche descendante relie  $a$  à  $b$ , et une flèche ascendante relie  $b$  à  $c$ .

- Avec:
- $a = -15 e^{-2} + 5$ ,
  - $b = 0$ ,
  - $c = 5$ .

1. c. Déterminons la valeur exacte du coefficient directeur de la tangente  $T$  à  $Cf$  au point  $A (-5; f(-5))$ :

La valeur exacte du coefficient directeur de la tangente  $T$  à  $Cf$  au point  $A$  est:  $f'(-5)$ .

Or:  $f'(-5) = 0,2 \times (-5) \times e^{0,2 \times (-5)}$  **cad:**  $f'(-5) = -e^{-1}$ .

Ainsi, le coefficient directeur a pour valeur exacte:  $-e^{-1}$ .

2. a. Justifions que  $f''(x) = (0,2 + 0,04x) e^{0,2x}$ :

Nous savons que pour tout  $x \in [-10; 5]$ :  $f'(x) = 0,2x e^{0,2x}$ . (u x e<sup>v</sup>)

Dans ces conditions, pour tout  $x \in [-10; 5]$ :

$$f''(x) = (0,2) \times (e^{0,2x}) + (0,2x) \times (0,2 e^{0,2x}) \quad (u' \times e^v + u \times v' \times e^v)$$

cad:  $f''(x) = (0,2 + 0,04x) \times e^{0,2x}$ .

Au total, pour tout  $x \in [-10; 5]$ , nous avons bien:  $f''(x) = (0,2 + 0,04x) \times e^{0,2x}$ .

## 2. b. Etudions la convexité de la fonction $f$ sur l'intervalle $[-10; 5]$ :

D'après le cours: •  $f$  est concave sur un intervalle  $I$  ssi:

$$\text{pour tout } x \in I, f''(x) \leq 0.$$

•  $f$  est convexe sur un intervalle  $I'$  ssi:

$$\text{pour tout } x \in I', f''(x) \geq 0.$$

Or ici, pour tout  $x \in [-10; 5]$ :  $f''(x) = (0,2 + 0,04x) e^{0,2x}$ :

Dans ces conditions: •  $f''(x) \leq 0$  ssi:  $0,2 + 0,04x \leq 0$  cad:  $x \leq -5$ ,

•  $f''(x) \geq 0$  ssi:  $0,2 + 0,04x \geq 0$  cad:  $x \geq -5$ .

(car pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^{0,2x} > 0$ )

Ainsi: •  $f$  est concave sur  $I = [-10; -5]$ ,

•  $f$  est convexe sur  $I' = [-5; 5]$ .

## 3. a. Déterminons la valeur exacte de $I$ définie par $I = \int_0^5 f(x) dx$ :

Ici:  $I = \int_0^5 f(x) dx$ .

D'où:  $I = [F(x)]_0^5$

$$\begin{aligned}
&= [(5x - 50) e^{0,2x} + 5x]_0^5 \\
&= ((25 - 50) \times e^1 + 25) - (-50 \times e^0 + 0) \\
&= 75 - 25e \\
&\approx 7,043.
\end{aligned}$$

- Ainsi :**
- une valeur exacte de  $I$  est  $75 - 25e$ ,
  - une valeur approchée de  $I$  est  $7,043$ .

### 3. b. Montrons que l'aire demandée vaut 12,5 unités d'aire:

En unités d'aire et à l'unité près, l'aire  $\mathcal{A}$  du domaine du plan sous la droite  $\mathcal{D}$ , au-dessus de l'axe des abscisses et limité par la droite d'équation  $x = 5$  correspond à:

$$\mathcal{A} = \int_0^5 f(x) dx.$$

La fonction  $h(x) = x$  est continue sur  $[0; 5]$ ; elle admet donc des primitives sur  $[0; 5]$  et par conséquent:  $\mathcal{A}$  existe.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_0^5 x dx \\
&= \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^5 \\
&= \frac{25}{2} \text{ u.a.}
\end{aligned}$$

Au total, l'aire demandée  $\mathcal{A}$  est bien égale à:  $\mathcal{A} = 12,5 \text{ u.a.}$

3. c. Déduisons-en une valeur approchée de l'aire du domaine  $S$  en unités d'aire:<sup>6</sup>

Une valeur approchée de  $S$  en unités d'aire est:

$$S = A - I$$

$$\Leftrightarrow S \approx 12,5 - (7,043) \text{ cad: } S \approx 5,46 \text{ u.a.}$$

Au total, une valeur approchée de  $S$  est:  $S \approx 5,46 \text{ u.a.}$