Maths
Complémentaires
Terminale

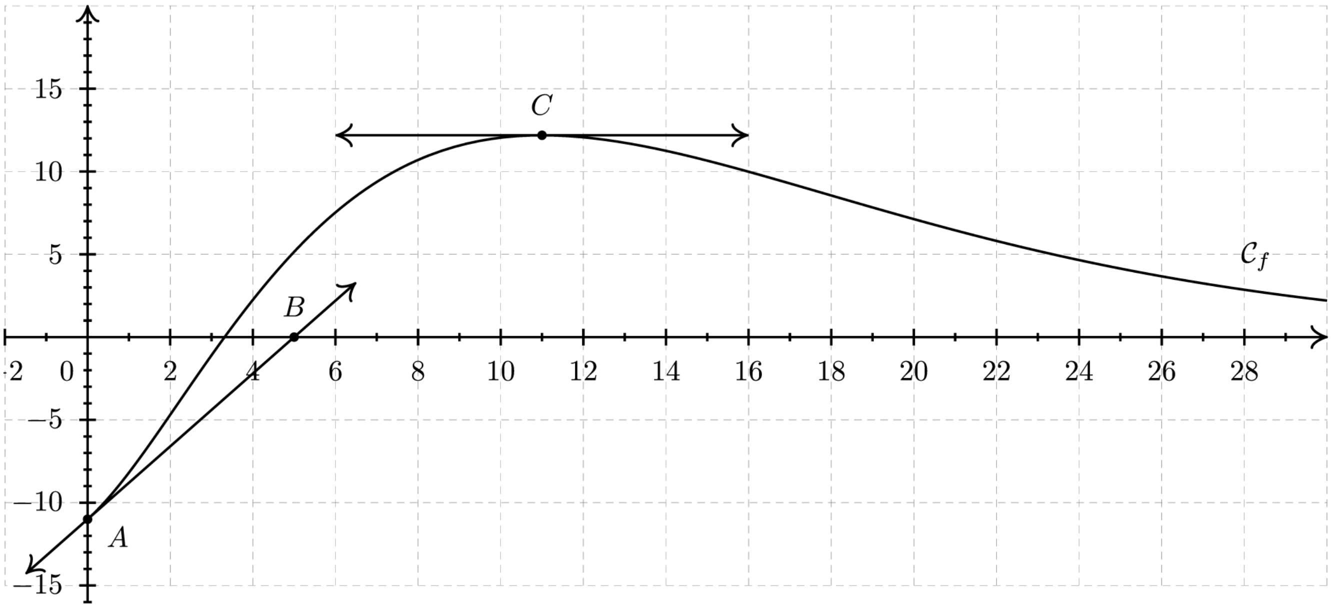
Intégrale, Synthèse

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

INTÉGRALES, SYNTHÈSE

Dans le repère orthogonal donné ci-dessous, $\mathcal{C}_f$ est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $[0\,;\,30]$.

La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 0 passe par le point $\mathrm{B}\,(5\,;\,0)$.
La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point C d'abscisse 11 est parallèle à l'axe des abscisses.



Dans toute la suite, on note f' la dérivée de la fonction f sur $[0\,;\,30]$ et F une primitive de f sur $[0\,;\,30]$.

Partie A – Lectures graphiques

1. Lire graphiquement les valeurs de $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(11)$.
2. L'affirmation « La fonction F est croissante sur $[0\,;\,11]$. » est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

Partie B – Étude d'une fonction

La fonction f est définie sur $[0\,;\,30]$ par :

$$f(x) = (x^2 - 11)\mathrm{e}^{-0,2x}.$$

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

	Instruction :	Résultat :
1	$f(x) \coloneqq (x^2 - 11) * \exp(-0{,}2 * x)$	$(x^2 - 11)\mathrm{e}^{-0{,}2x}$
2	Dérivée($f(x)$)	$(-0{,}2x^2 + 2x + 2{,}2)\mathrm{e}^{-0{,}2x}$
3	Intégrale($f(x)$)	$(-5x^2 - 50x - 195)\mathrm{e}^{-0{,}2x}$

1. Pour tout réel $x \in [0\,;\,30]$, justifier le résultat de l'instruction obtenu en ligne 2 du logiciel.
2. Étudier le signe de f' sur $[0\,;\,30]$ puis dresser le tableau des variations de f sur $[0\,;\,30]$.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0\,;\,11]$ puis donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
4. En utilisant sans le démontrer un résultat du logiciel, calculer la valeur exacte puis l'arrondi à 10^{-2} de l'intégrale : $I = \int_{10}^{20} f(x)\mathrm{d}x$.

Partie C – Application économique

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-2} si nécessaire.

La fonction de demande d'un produit est modélisée sur l'intervalle $[5\,;\,30]$ par la fonction f étudiée dans la **partie B**.

Le nombre $f(x)$ représente la quantité demandée, exprimée en centaines de milliers d'objets, lorsque le prix unitaire est égal à x euros.

1. Calculer le nombre d'objets demandés, au millier près, lorsque le prix unitaire est fixé à 15 euros.
2. En utilisant les résultats de la **partie B**, déterminer la demande moyenne, arrondie au millier d'objets, lorsque le prix unitaire varie entre 10 et 20 euros.
3. L'élasticité $E(x)$ de la demande par rapport au prix est le pourcentage de variation de la demande pour une augmentation de 1% du prix.

   On admet qu'une bonne approximation de $E(x)$ est donnée par :

   $$E(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \times x \quad \text{lorsque} \quad x \in [5\,;\,30].$$

   Calculer $E(15)$ et interpréter le résultat.