

www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

Intégrale, Synthèse



ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

INTÉGRALES, SYNTHÈSE

Un ébéniste décide de refaire les accoudoirs d'un fauteuil (ébauche du fauteuil en **annexe 1**). On modélise l'accoudoir à l'aide de la fonction f définie sur $[0 ; 60]$ par :

$$f(x) = 70 + (14x + 42) e^{-\frac{x}{5}}$$

La courbe représentative de f , notée C_f est donnée en **annexe 2**.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[0 ; 60]$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Partie A

Dans toute cette partie, les réponses sont obtenues graphiquement à partir de la courbe représentative de f donnée en **annexe 2**.

On admet que le point A de C_f d'abscisse 7 est un point d'inflexion de C_f .

- Déterminer une valeur approchée de $f(0)$ et $f(60)$.
- Déterminer $f''(7)$.
- On considère la surface située entre l'axe des abscisses, la courbe C_f , et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 60$.
 - Hachurer la surface décrite ci-dessus sur l'**annexe 2**.
 - L'ébéniste estime l'aire de cette surface à 3800 unités d'aire. Cette estimation est-elle correcte ?

Partie B

- Justifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; 60]$ on a :

$$f'(x) = \frac{1}{5}(-14x + 28)e^{-\frac{x}{5}}$$

- Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 60]$.
 - Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 60]$.
On arrondira à l'unité près les valeurs numériques qui apparaissent dans le tableau de variations.
- Un logiciel de calcul formel permet d'afficher les lignes suivantes :

1
○

$$\text{Dérivée (Dérivée (70 + (14 x + 42) e^{-\frac{x}{5}}))}$$
$$\rightarrow \frac{1}{25} (14 x + 42) e^{-\frac{1}{5}x} - \frac{28}{5} e^{-\frac{1}{5}x}$$

2
○

$$\text{Factoriser } \left(\frac{1}{25} (14 x + 42) e^{-\frac{1}{5}x} - \frac{28}{5} e^{-\frac{1}{5}x} \right)$$
$$\rightarrow 14 e^{-\frac{1}{5}x} \cdot \frac{x - 7}{25}$$

En utilisant les résultats ci-dessus, étudier la convexité de f .

4. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; 60]$, on pose :

$$g(x) = (14x + 42)e^{-\frac{x}{5}}$$

et

$$G(x) = (-70x - 560)e^{-\frac{x}{5}}$$

- a) Montrer que G est une primitive de g sur l'intervalle $[0 ; 60]$.
- b) En déduire une primitive de f sur l'intervalle $[0 ; 60]$.
- c) Calculer la valeur exacte de $\int_0^{60} f(x)dx$, puis en donner une valeur approchée à l'unité d'aire près.

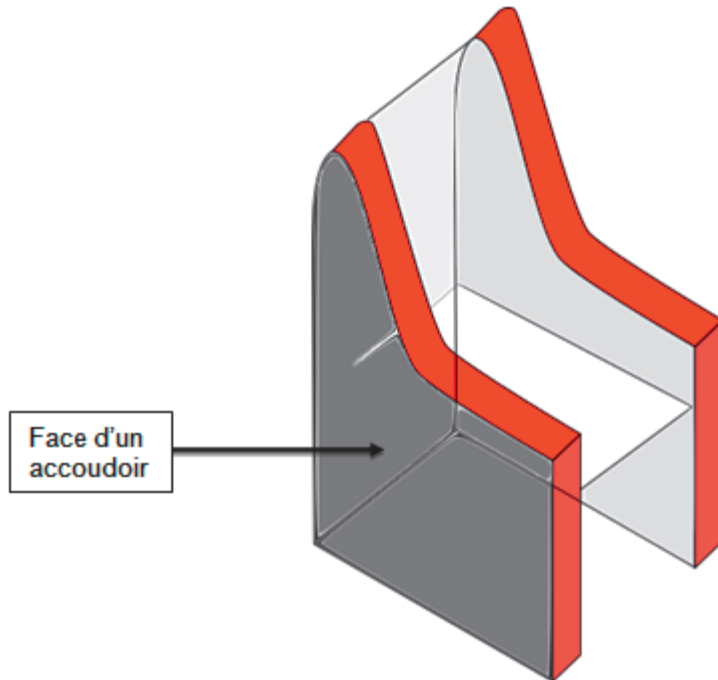
Partie C

L'ébéniste découpe 2 accoudoirs identiques sur le modèle de la surface hachurée de l'annexe 1 en choisissant comme unité le cm.

Il souhaite vernir les deux faces de chaque accoudoir (**annexe 1**) ainsi que le dossier du fauteuil dont l'aire est égale à 5400 cm^2 . Or il lui reste le quart d'un petit pot de vernis pouvant couvrir 10 m^2 . Aura-t-il suffisamment de vernis ?

ANNEXES

Annexe 1 : ébauche du fauteuil



Annexe 2

