

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Maths Complémentaires Terminale

Intégrale, Synthèse



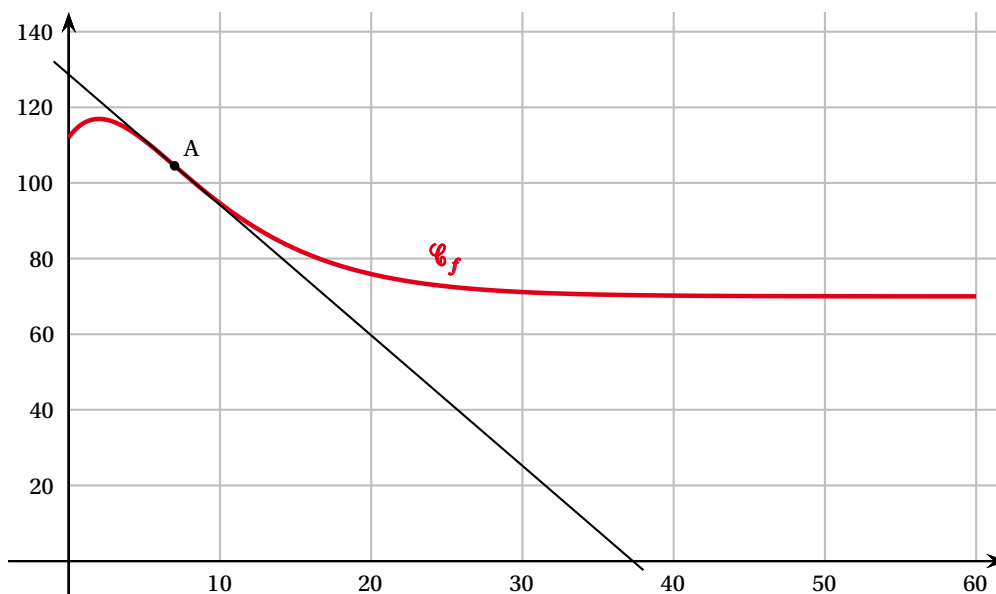
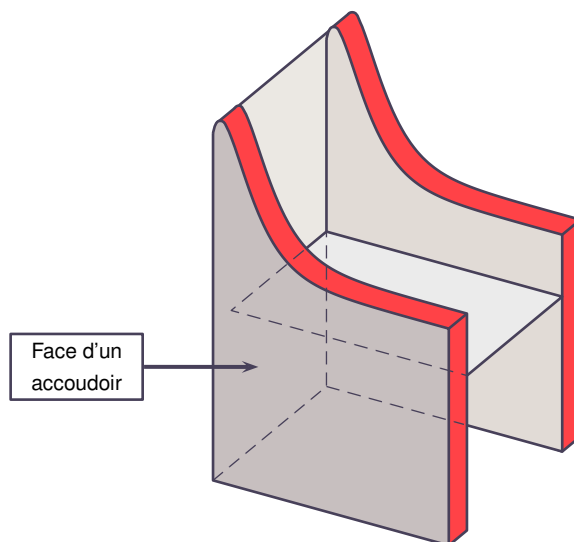
**CORRIGÉ** DE L'EXERCICE

## CORRECTION

### Partie A:

1. Déterminons une valeur approchée de  $f(0)$  et  $f(60)$ :

Soient les 2 graphiques suivantes:



Graphiquement, il semble que:

- $f(0) \approx 115$ ,
- $f(60) \approx 72$ .

Ainsi, les valeurs approchées de  $f(0)$  et  $f(60)$  sont:

$$f(0) \approx 115 \text{ et } f(60) \approx 72.$$

## 2. Déterminons $f''(7)$ :

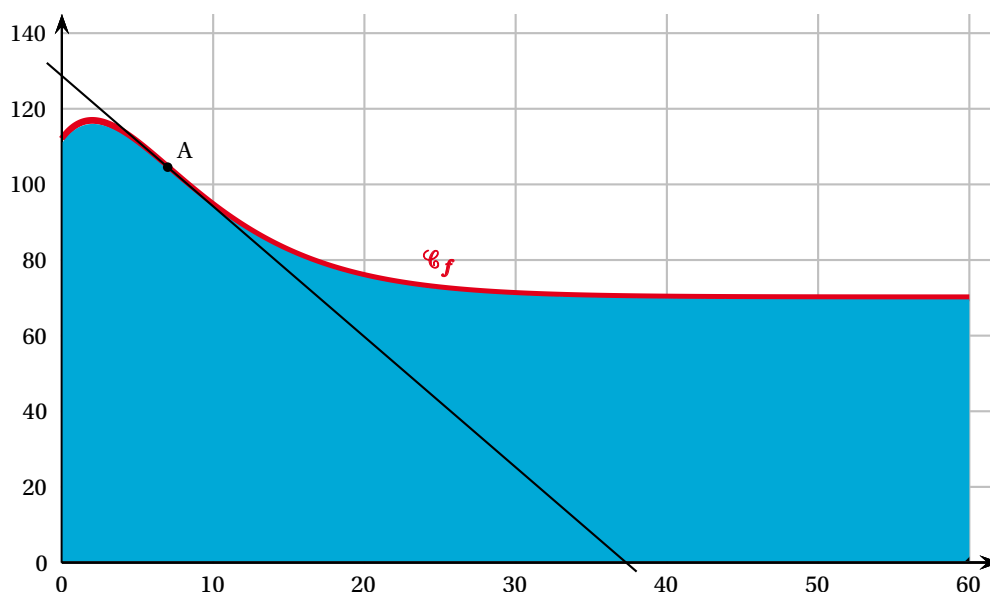
D'après l'énoncé le point A ( $7; f(7)$ ) est un point d'inflexion de  $\mathcal{C}_f$ .

En tant que point d'inflexion, nous pouvons affirmer que:  $f''(7) = 0$ .

Au total:  $f''(7) = 0$ .

## 3. a. Représentons la surface demandée:

La surface située entre l'axe des abscisses, la courbe  $\mathcal{C}_f$ , et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = 60$  correspond à la zone turquoise du graphique suivant:



### 3. b. L'estimation de l'ébéniste est-elle correcte ?

L'estimation de l'ébéniste n'est pas correcte.

En effet, la zone turquoise contient le rectangle  $70 \times 60 = 4200$  u.a.

Par conséquent, l'aire de cette surface turquoise est strictement supérieure à 4200 u.a.

Or:  $3800 < 4200$ .

Ainsi, comme  $3800 < 4200$ : l'estimation de l'ébéniste est fautive !

## Partie B:

### 1. Calculons $f'$ sur l'intervalle $[0; 60]$ :

Ici: •  $f(x) = 70 + (14x + 42)e^{-\frac{x}{5}}$        $(70 + u \times e^v)$   
 •  $Df = [0; 60]$ .

D'après l'énoncé,  $f$  est dérivable sur  $[0; 60]$ .

Ainsi, nous pouvons calculer  $f'$  pour tout  $x \in [0; 60]$ .

Pour tout  $x \in [0; 60]$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 + (14) \times (e^{-\frac{x}{5}}) + (14x + 42) \times \left(-\frac{1}{5}\right) \times (e^{-\frac{x}{5}}) \\ &\quad (0 + u' \times e^v + u \times v' \times e^v) \\ &= \frac{1}{5} (-14x + 28) e^{-\frac{x}{5}}. \end{aligned}$$

Au total, pour tout  $x \in [0; 60]$ , nous avons bien:

$$f'(x) = \frac{1}{5} (-14x + 28) e^{-\frac{x}{5}}.$$

2. a. Etudions le signe de  $f'$  sur  $[0; 60]$ :

$$f'(x) = \frac{1}{5} (-14x + 28) e^{-\frac{x}{5}}, \text{ pour tout } x \in [0; 60].$$

Nous allons distinguer 2 cas pour tout  $x \in [0; 60]$ :

• 1<sup>er</sup> cas:  $f'(x) \leq 0$ .

$$f'(x) \leq 0 \text{ ssi } -14x + 28 \leq 0 \text{ cad ssi: } x \geq 2 \text{ ou } x \in [2; 60].$$

( car pour tout  $x \in \mathbb{R}, e^{-\frac{x}{5}} > 0$  )

• 2<sup>ème</sup> cas:  $f'(x) \geq 0$ .

$$f'(x) \geq 0 \text{ ssi } -14x + 28 \geq 0 \text{ cad ssi: } x \leq 2 \text{ ou } x \in [0; 2].$$

( car pour tout  $x \in \mathbb{R}, e^{-\frac{x}{5}} > 0$  )

Ainsi: •  $f$  est croissante sur  $[0; 2]$ ,

•  $f$  est décroissante sur  $[2; 60]$ .

2. b. Dressons le tableau des variations de  $f$  sur  $[0; 60]$ :

Nous pouvons donc dresser le tableau des variations suivant:

$x$	0	2	60		
$f'$		+	0	-	
$f$			$a$	$b$	$c$

Avec: •  $a = 112$ ,

$$\bullet b = 70 + 70 e^{-\frac{2}{5}}, \quad (\approx 117)$$

$$\bullet c = 70 + 882 e^{-12}. \quad (\approx 70)$$

### 3. Etudions la convexité de $f$ :

D'après le cours:  $\bullet f$  est concave sur un intervalle  $I$  ssi:

$$\text{pour tout } x \in I, f''(x) \leq 0.$$

$\bullet f$  est convexe sur un intervalle  $I'$  ssi:

$$\text{pour tout } x \in I', f''(x) \geq 0.$$

Or ici:  $f''(x) = 14x \left( \frac{x-7}{25} \right) x e^{-\frac{x}{5}}.$

Dans ces conditions:  $\bullet f''(x) \leq 0$  ssi:  $x \leq 7$  cad:  $x \in [0; 7]$ .

$\bullet f''(x) \geq 0$  ssi:  $x \geq 7$  cad:  $x \in [7; 60]$ .

Ainsi:  $\bullet f$  est concave sur  $I = [0; 7]$ ,

$\bullet f$  est convexe sur  $I' = [7; 60]$ .

### 4. a. Montrons que $G$ est une primitive de $g$ sur l'intervalle $[0; 60]$ :

Sur l'intervalle  $[0; 60]$ ,  $G$  est une primitive de  $g$  ssi:  $G'(x) = g(x).$

Ici:  $G(x) = (-70x - 560) e^{-\frac{x}{5}}$ , pour tout  $x \in [0; 60]$ .  $(u \times e^v)$

D'où pour tout  $x \in [0; 60]$ :  $G'(x) = (-70) x (e^{-\frac{x}{5}}) + (-70x - 560) x \left( -\frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}} \right)$

$$(u' \times v + u \times v' \times e^v)$$

$$= (14x + 42) e^{-\frac{x}{5}} = g(x).$$

**Au total:**  $G$  est bien une primitive de  $g$  sur  $[0; 60]$ .

**4. b. Déduisons-en une primitive de  $f$  sur  $[0; 60]$ :**

Nous remarquons que:  $f(x) = g(x) + 70$ .

**Donc une primitive de  $f$  sur  $[0; 60]$  est:**  $G(x) + 70x$ .

**4. c. Calculons la valeur exacte et la valeur approchée de  $\int_0^{60} f(x) dx$ :**

Il s'agit de calculer ici:  $I = \int_0^{60} f(x) dx$ .

$$\text{D'où: } I = \int_0^{60} g(x) dx + \int_0^{60} 70 dx$$

$$= [G(x)]_0^{60} + [70x]_0^{60}$$

$$= [(-70x - 560)e^{-\frac{x}{5}}]_0^{60} + [70x]_0^{60}$$

$$= 4760(1 - e^{-12})$$

$$\approx 4760 \text{ à l'unité près.}$$

**Au total:** • une valeur exacte de  $I$  est:  $4760(1 - e^{-12})$ ,

• une valeur approchée de  $I$  est:  $4760$  à l'unité près.

### Partie C:

**Aura-t-il suffisamment de vernis ?**

La surface  $S$  à vernir a une aire égale à:

$$A = 4I + 5400 \text{ cad: } A = 24440 \text{ cm}^2.$$

( car: 2 accoudoirs à vernir sur les 2 faces = 4 )

$$\text{Or: } \frac{1}{4} \times 10 \text{ m}^2 = 25000 \text{ cm}^2.$$

Au total, comme  $25000 > 24440$ : l'ébéniste aura suffisamment de vernis pour toute la surface désirée.