

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Maths Complémentaires Terminale

Intégrale, Synthèse



**CORRIGÉ** DE L'EXERCICE

## CORRECTION

### Partie A:

1. L'aire du rectangle OPMQ est-elle constante quelle que soit la position du point M sur Cf ?

Non.

Justifions le.

L'aire  $\mathcal{A}$  du rectangle OPMQ est:

Longueur  $\times$  Largeur =  $f(x) \times x$

$$\Rightarrow \mathcal{A}(x) = 2x - x \ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

Comme l'aire  $\mathcal{A}$  est fonction de  $x$ , elle ne peut pas être constante car  $x \in ]0;14]$

2. L'aire du rectangle OPMQ peut-elle être maximale ?

Oui.

Justifions le.

Nous devons calculer la valeur de "  $x$  " telle que:  $\mathcal{A}'(x) = 0$ .

Ici: •  $\mathcal{A}(x) = 2x - x \ln\left(\frac{x}{2}\right)$

•  $D_{\mathcal{A}} = ]0;14]$ .

Posons:  $\mathcal{A} = f_1 + f_2 \times f_3$ , avec:  $f_1(x) = 2x$ ,  $f_2(x) = -x$  et  $f_3(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$ .

$f_1$  et  $f_2$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  comme fonctions polynômes, donc dérivables sur  $]0;4]$ .

$f_3$  est dérivable sur  $]0;+\infty[$  comme fonction "ln", donc dérivable sur  $]0;4]$ .

Par conséquent,  $f_2 \times f_3$  est dérivable sur  $]0;4]$  comme produit de 2 fonctions dérivables sur  $]0;4]$ .

Enfin,  $\mathcal{A}$  est dérivable sur  $]0;4]$  comme somme ( $f_1 + f_2 \times f_3$ ) de 2 fonctions dérivables sur  $]0;4]$ .

Ainsi, nous pouvons calculer  $\mathcal{A}'$  pour tout  $x \in ]0;4]$ .

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in ]0;4]: \quad \mathcal{A}'(x) &= 2 - \left(1 \times \ln\left(\frac{x}{2}\right) + x \times \frac{1}{x}\right) \\ &\Rightarrow \mathcal{A}'(x) = 1 - \ln\left(\frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

Dans ces conditions:  $\mathcal{A}'(x) = 0$  ssi:  $x = 2e$ .

- Notons que:
- $\mathcal{A}$  est croissante sur  $]0;2e]$
  - $\mathcal{A}$  est décroissante sur  $[2e;4]$
  - $\mathcal{A}$  est maximale quand  $x = 2e$ .

**En conclusion:** le point  $M(2e;f(2e))$  cad  $M(2e;1)$  est tel que l'aire du rectangle OPMQ est maximale.

Cette aire maximale est égale à:  $\mathcal{A}_{\max} = 2 \times (2e) - (2e) \ln\left(\frac{2e}{2}\right)$

$$\Rightarrow \mathcal{A}_{\max} = 2e.$$

## Partie B: Modélisation continue

1. a. Étudions le sens de variation de  $f$  sur  $[0; +\infty[$ :

• Calculons  $f'$ :

Ici: •  $f(t) = 100 - 75e^{\frac{-\ln(5)}{10}t}$

•  $Df = [0; +\infty[$ .

Posons:  $f = f_1 + f_2 \times f_3$ , avec:  $f_1(t) = 100$ ,  $f_2(t) = -75$  et  $f_3(t) = e^{\frac{-\ln(5)}{10}t}$ .

$f_1$  et  $f_2$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  comme fonctions polynômes, donc dérivables sur  $[0; +\infty[$ .

$f_3$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme fonction "exponentielle", donc dérivable sur  $[0; +\infty[$ .

Par conséquent,  $h = f_2 \times f_3$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  comme produit de 2 fonctions dérivables sur  $[0; +\infty[$ .

Donc,  $f$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  comme somme ( $f_1 + h$ ) de 2 fonctions dérivables sur  $[0; +\infty[$ .

Ainsi, nous pouvons calculer  $f'$  pour tout  $t \in [0; +\infty[$ .

Pour tout  $t \in [0; +\infty[$ :  $f'(t) = 75 \left( \frac{\ln(5)}{10} \right) e^{\frac{-\ln(5)}{10}t}$

$$\Rightarrow f'(t) = 7,5 \ln(5) e^{\frac{-\ln(5)}{10}t}.$$

Au total: pour tout  $t \in [0; +\infty[$ ,  $f'(t) = 7,5 \ln(5) e^{\frac{-\ln(5)}{10}t}$ .

• Étudions le signe de  $f'$  sur  $[0; +\infty[$ :

Pour tout  $t \in [0; +\infty[$ :  $f'(t) > 0$ .

Donc pour tout  $t \in [0; +\infty[$ :  $f$  est strictement croissante.

• Dressons le tableau de variation:

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

$t$	0	$+\infty$
$f'$	+	
$f$		

Avec: •  $a = f(0) \Rightarrow a = 25$ ,

•  $b = f(+\infty) \Rightarrow b = 100$ .

$$\left( \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 100 \text{ car: } \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}} = 0 \right)$$

1. b. Justifions que si  $t \geq 10$  alors  $f(t) \geq 85$ :

Supposons:  $t \geq 10$  (1).

$$(1) \Rightarrow \frac{\ln(5) \times (10)}{10} \geq \ln(5)$$

$$\Rightarrow \frac{-\ln(5) \times (10)}{10} \leq -\ln(5)$$

$$\Rightarrow e^{\frac{-\ln(5) \times (10)}{10}} \leq e^{-\ln(5)}$$

$$\Rightarrow 100 - 75e^{\frac{-\ln(5) \times (10)}{10}} \geq 100 - 75 \times \left(\frac{1}{5}\right)$$

$$\Rightarrow f(t) \geq 100 - 15$$

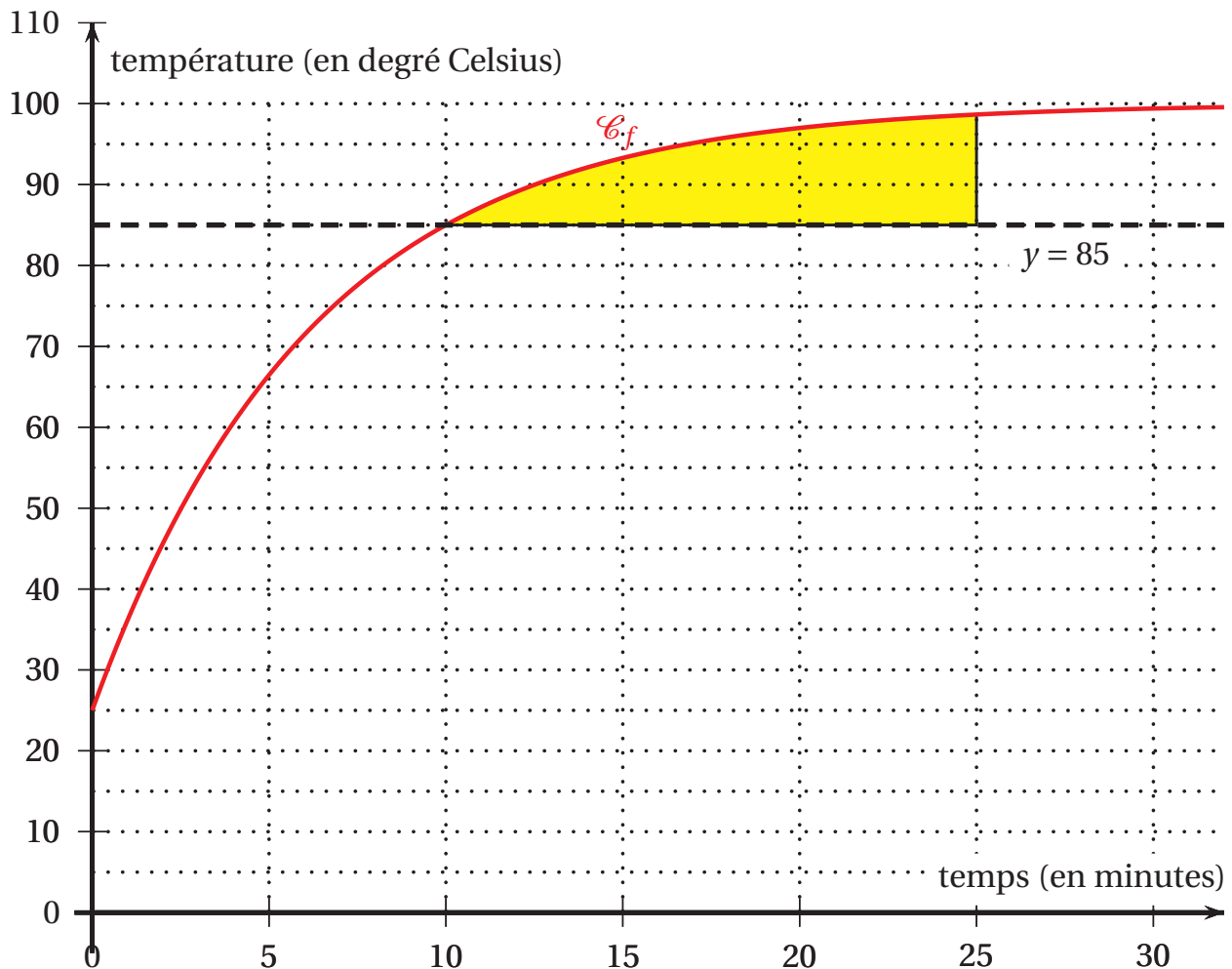
$$\Rightarrow f(t) \geq 85.$$

**Au total:** si  $t \geq 10$ , alors  $f(t) \geq 85$ .

2. a. Justifions, à l'aide du graphique que  $\mathcal{A}(25) > 80$ :

En unités d'aire et à l'unité près, l'aire  $\mathcal{A}(25)$  du domaine délimité par les droites d'équation  $t = 10$ ,  $t = 25$ ,  $y = 85$  et la courbe représentative de  $f$ , est telle que:  $\mathcal{A}(25) \approx 100$ .

Nous pouvons représenter cette aire  $\mathcal{A}(25)$ , en jaune, sur le graphique suivant:



En effet:

- un rectangle correspond à  $5 \times 5$  unités d'aire,
- dans la partie jaune, il y a 3 rectangles entiers + 2 demi-rectangles + des petits morceaux de rectangles, soit au minimum:

$$3 \times (5 \times 5) + 2 \times \left( \frac{5 \times 5}{2} \right) + \varepsilon \text{ cad une certaine d'unités d'aire.}$$

Au total, l'aire demandée  $\mathcal{A}(25)$  est telle que:  $\mathcal{A}(25) > 80$ .

2. b. Montrons que  $\mathcal{A}(\theta) = 15(\theta - 10) - 75 \int_{10}^{\theta} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}} dt$ :

$$\mathcal{A}(\theta) = \int_{10}^{\theta} (f(t) - 85) dt.$$

La fonction " $f(t) - 85$ " est continue sur  $[0; +\infty[$  donc sur  $[10; \theta]$ . Elle admet donc des primitives sur  $[10; \theta]$  et par conséquent:  $\mathcal{A}(\theta)$  existe.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\theta) &= \int_{10}^{\theta} (f(t) - 85) dt \\ &= \int_{10}^{\theta} (100 - 75e^{\frac{-\ln(5)t}{10}} - 85) dt \\ &= \int_{10}^{\theta} (15 - 75e^{\frac{-\ln(5)t}{10}}) dt \\ &= \int_{10}^{\theta} 15 dt - 75 \int_{10}^{\theta} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}} dt \\ &= [15t]_{10}^{\theta} - 75 \int_{10}^{\theta} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}} dt \\ &\Rightarrow \mathcal{A}(\theta) = 15(\theta - 10) - 75 \int_{10}^{\theta} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}} dt. \end{aligned}$$

Au total: l'égalité est bien vérifiée.

2. c. La stérilisation est-elle finie au bout de 20 minutes ?

La stérilisation est finie au bout de 20 minutes ssi:  $\mathcal{A}(20) > 80$ .

$$\begin{aligned}
 A(20) > 80 &\Leftrightarrow 15(20-10) - 75 \int_{10}^{20} e^{\frac{20-\ln(5)t}{10}} dt > 80 \\
 &\Leftrightarrow -75 \int_{10}^{20} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}} dt > -70 \\
 &\Leftrightarrow \int_{10}^{20} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}} dt < \frac{7}{7,5}.
 \end{aligned}$$

Posons:  $I = \int_{10}^{20} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}} dt.$

Ainsi: 
$$\begin{aligned}
 I &= \left[ \frac{-10}{\ln(5)} e^{\frac{-\ln(5)t}{10}} \right]_{10}^{20} \\
 &= \frac{-10}{\ln(5)} \left[ \left( \frac{1}{5} \right)^2 - \frac{1}{5} \right] \\
 \Rightarrow I &= \frac{8}{5 \times \ln(5)} > \frac{7}{7,5}.
 \end{aligned}$$

Au total, au bout de 20 minutes, la stérilisation n'est pas finie car:  $I > \frac{7}{7,5}.$