Maths Complémentaires Terminale

Calcul d'intégrales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ON S'AMUSE ... 7

CORRECTION

1. Calculons la dérivée de $g(x) = \sqrt{x^2 + 2}$ sur $[3; 4]$:

Ici: $g(x) = \sqrt{x^2 + 2}$ <=> $\mathbf{g(x) = (x^2 + 2)^{1/2}}$.

La fonction g est dérivable sur $[3; 4]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer sa dérivée sur $[3; 4]$.

Pour tout $x \in [3; 4]$: $g'(x) = \frac{1}{2} \times (x^2 + 2)^{-1/2} \times (2x)$

$$= x \times (x^2 + 2)^{-1/2}$$

cad: $\mathbf{g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}}$.

Ainsi pour tout $x \in [3; 4]$: $\mathbf{g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}}$.

2. Déduisons-en la dérivée de la fonction $h(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2})$ sur $[3; 4]$:

La fonction h est dérivable sur $[3; 4]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer sa dérivée sur $[3; 4]$.

Pour tout $x \in [3; 4]$: $h'(x) = \dfrac{(x + \sqrt{x^2+2})'}{(x + \sqrt{x^2+2})}$ $\left(\dfrac{u'}{u}\right)$

$$= \frac{1 + g'(x)}{x + \sqrt{x^2+2}}$$

$$= \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{x + \sqrt{x^2+2}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+2} + x}{\sqrt{x^2+2} \times (x + \sqrt{x^2+2})}$$

cad: $h'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$.

Ainsi pour tout $x \in [3; 4]$: $h'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$.

3. **Déduisons-en alors I:**

Ici: $I = \displaystyle\int_3^4 \frac{7}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

Soit $f(x) = \dfrac{7}{\sqrt{x^2+1}}$. f est continue sur $[3; 4]$. Elle admet donc des primitives

sur $[3; 4]$ et par conséquent I **existe**.

$$I = \int_3^4 \frac{7}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \iff I = 7 \times \int_3^4 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

$$\iff I = 7 \times \int_3^4 h'(x)\,dx$$

$$\iff I = 7 \times [\,h(x)\,]_3^4$$

$$\iff I = 7 \times [\,\ln(x + \sqrt{x^2 + 2})\,]_3^4$$

cad: $I = 7 \times \left(\ln(4 + \sqrt{18}) - \ln(3 + \sqrt{11})\right).$

Ainsi: $I = 7 \times \left(\ln(4 + \sqrt{18}) - \ln(3 + \sqrt{11})\right).$