Maths Complémentaires Terminale

Calcul d'intégrales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CHASLES ET VALEUR ABSOLUE 2

CORRECTION

1. Montrons que pour tout $x \in [-5\,;5]$, $f(x) = -(x-2)(x+3)$:

Pour tout $x \in [-5\,;5]$: $-(x-2)(x+3) = -(x^2 + 3x - 2x - 6)$

$= -x^2 - x + 6$

$= f(x)$.

Ainsi, pour tout $x \in [-5\,;5]$, nous avons bien: $f(x) = -(x-2)(x+3)$.

2. Donnons le tableau de signes de f:

Notons que les **deux racines** de f sont: $x_1 = -3$ et $x_2 = 2$.

Dans ces conditions, nous avons le tableau de signes suivant:

x	-5		-3		2		5
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

En conclusion:
- Si $x \in [-5\,;-3]$, $f(x) \leqslant 0$
- Si $x \in [-3\,;2]$, $f(x) \geqslant 0$
- Si $x \in [2\,;5]$, $f(x) \leqslant 0$.

3. Calculons $I = \int_{-5}^{5} |-x^2 - x + 6|\, dx$:

Soit $g(x) = |-x^2 - x + 6|$, pour tout $x \in [-5\,;5]$.

Nous pouvons écrire: $g(x) = \begin{cases} x^2 + x - 6 \text{ si } x \in [-5\,;-3] \\ -x^2 - x + 6 \text{ si } x \in [-3\,;2] \\ x^2 + x - 6 \quad x \in [2\,;5] \end{cases}$.

La fonction g est continue sur $[-5\,;5]$. Elle admet donc des primitives sur l'intervalle $[-5\,;5]$ et par conséquent **I existe**.

$$I = \int_{-5}^{5} g(x)\, dx \iff I = \int_{-5}^{5} |-x^2 - x + 6|\, dx$$

$$\iff I = \int_{-5}^{-3} (x^2 + x - 6)\, dx + \int_{-3}^{2} (-x^2 - x + 6)\, dx + \int_{2}^{5} (x^2 + x - 6)\, dx$$

$$\iff I = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x\right]_{-5}^{-3} + \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-3}^{2} + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x\right]_{2}^{5}$$

cad: $I = 27$.

Ainsi: $I = 27$.