Maths Complémentaires Terminale

Calcul d'intégrales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CALCUL D'INTÉGRALES 4

CORRECTION

1. Calculons l'intégrale I :

Ici : $I = \int_3^6 e^x (e^x + 3)\, dx$.

Soit $f(x) = e^x (e^x + 3)$. f est continue sur $[3 ; 6]$. Elle admet donc des primitives sur $[3 ; 6]$ et par conséquent I **existe**.

$$I = \int_3^6 e^x (e^x + 3)\, dx \iff I = \int_3^6 (e^{2x} + 3e^x)\, dx$$

$$\iff I = \left[\frac{1}{2} e^{2x} + 3e^x \right]_3^6$$

$$\iff I = \left(\frac{1}{2} e^{2\times 6} + 3e^6 \right) - \left(\frac{1}{2} e^{2\times 3} + 3e^3 \right)$$

cad : $I = \frac{1}{2} e^{12} + \frac{5}{2} e^6 - 3e^3$.

Ainsi : $I = \frac{1}{2} e^{12} + \frac{5}{2} e^6 - 3e^3$.

2. Calculons l'intégrale J :

Ici: $J = \int_{-1}^{3} x\,|x|\,dx$.

Soit $f(x) = x\,|x|$. f est continue sur $[-1;3]$. Elle admet donc des primitives sur $[-1;3]$ et par conséquent **J existe**.

Notons que: • $f(x) = x \times (-x)$ si $x \in [-1;0]$ $(|x| = -x)$

• $f(x) = x \times x$ si $x \in [0;3]$ $(|x| = x)$.

Dans ces conditions: $J = \int_{-1}^{0} x \times (-x)\,dx + \int_{0}^{3} x \times x\,dx$

$$\iff J = \int_{-1}^{0} -x^2\,dx + \int_{0}^{3} x^2\,dx$$

$$\iff J = \left[\frac{-x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{3}$$

$$\iff J = \left(\left(\frac{-(0)^3}{3}\right) - \left(\frac{-(-1)^3}{3}\right)\right) + \left(\left(\frac{(3)^3}{3}\right) - \left(\frac{(0)^3}{3}\right)\right)$$

cad: $J = \dfrac{26}{3}$.

Ainsi: $J = \dfrac{26}{3}$.

3. Calculons l'intégrale K:

Ici: $K = \int_{2}^{0} \sqrt{|1-x|}\,dx \iff K = -\int_{0}^{2} \sqrt{|1-x|}\,dx$.

Soit $f(x) = -\sqrt{|1-x|}$. f est continue sur $[0;2]$. Elle admet donc des primitives sur $[0;2]$ et par conséquent **K existe**.

Notons que: • $f(x) = -\sqrt{1-x}$ si $x \in [0;1]$ $(|1-x| = 1-x)$

• $f(x) = -\sqrt{-1+x}$ si $x \in [1;2]$ $(|1-x| = -1+x)$.

Dans ces conditions: $K = -\int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx + \left(-\int_1^2 \sqrt{-1+x}\,dx\right)$

$$\Longleftrightarrow \quad K = -\left[\frac{-2}{3}(1-x)^{3/2}\right]_0^1 - \left[\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}\right]_1^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad K = \frac{2}{3}\left((1-1)^{3/2} - (1-0)^{3/2}\right) - \frac{2}{3}\left((2-1)^{3/2} - (1-1)^{3/2}\right)$$

cad: $K = -\frac{4}{3}$.

Ainsi: $K = -\frac{4}{3}$.