

www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

Calcul d'intégrales



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. Calculons g' sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

La fonction g est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer sa dérivée sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$: $g'(x) = 0 + 2 \cos x$.

cad: $g'(x) = 2 \cos x$.

Ainsi pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$: $g'(x) = 2 \cos x$.

2. Déduisons-en la valeur de I :

$$\text{Ici: } I = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos x}{1 + 2 \sin x} \right) dx.$$

Soit $f(x) = \frac{\cos x}{1 + 2 \sin x}$. f est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Elle admet donc des primitives

sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et par conséquent I existe.

$$I = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos x}{1 + 2 \sin x} \right) dx \Leftrightarrow I = \frac{1}{2} \times \int_0^{\pi/2} \left(\frac{2 \cos x}{1 + 2 \sin x} \right) dx$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{1}{2} \times \int_0^{\pi/2} \frac{g'(x)}{g(x)} dx$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{1}{2} \times \left[\ln(g(x)) \right]_0^{\pi/2}$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{1}{2} \times \left[\ln(1 + 2 \sin x) \right]_0^{\pi/2}$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{1}{2} \times \left(\ln \left(1 + 2 \sin \frac{\pi}{2} \right) - \ln(1 + 2 \sin 0) \right)$$

cad: $I = \frac{1}{2} \times (\ln(3) - 0)$.

Ainsi: $I = \frac{\ln(3)}{2}$.

3. a. Montrons que $I + J = 1$:

$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos x}{1 + 2 \sin x} \right) dx + \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin(2x)}{1 + 2 \sin x} \right) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos x + \sin(2x)}{1 + 2 \sin x} \right) dx. \end{aligned}$$

Or: $\sin(2x) = 2 \sin x \times \cos x$.

$$\begin{aligned} \text{Dans ces conditions: } \frac{\cos x + \sin(2x)}{1 + 2 \sin x} &= \frac{\cos x + 2 \sin x \times \cos x}{1 + 2 \sin x} \\ &= \frac{\cos x (1 + 2 \sin x)}{1 + 2 \sin x} \end{aligned}$$

$$= \cos x.$$

$$\text{D'où: } I + J = \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$$

$$= \left[\sin x \right]_0^{\pi/2} \quad \text{cad: } I + J = 1.$$

Ainsi, nous avons bien: $I + J = 1$.

3. b. Déduisons-en la valeur de J:

Comme $I + J = 1$ et $I = \frac{\ln(3)}{2}$, nous pouvons affirmer que:

$$J = 1 - \frac{\ln(3)}{2}.$$

$$\text{Ainsi: } J = 1 - \frac{\ln(3)}{2}.$$