

www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

Calcul d'intégrales



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

UNE INTÉGRALE !

13

CORRECTION

1. Calculons I_1 :

$$\text{Ici: } I_1 = \int_2^4 \frac{x}{1+x^2} dx.$$

Soit $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. f est continue sur $[2; 4]$. Elle admet donc des primitives

sur $[2; 4]$ et par conséquent I_1 existe.

$$I_1 = \int_2^4 \frac{x}{1+x^2} dx \Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} \times \int_2^4 \left(\frac{2x}{1+x^2} \right) dx$$

$$\Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} \times \int_2^4 \frac{U'(x)}{U(x)} dx, \text{ avec: } U(x) = 1+x^2$$

$$\Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} \times \left[\ln(U(x)) \right]_2^4$$

$$\Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} \times \left[\ln(1+x^2) \right]_2^4$$

$$\text{cad: } I_1 = \frac{1}{2} \times (\ln(17) - \ln(5)).$$

Ainsi: $I_1 = \frac{1}{2} \times (\ln(17) - \ln(5))$ ou $I_1 = \frac{1}{2} \times \ln\left(\frac{17}{5}\right)$.

2. Déduisons-en I_2 après avoir donné la valeur de $I_1 + I_2$:

$$I_1 + I_2 = \int_2^4 \frac{x}{1+x^2} dx + \int_2^4 \frac{x^3}{1+x^2} dx$$

$$\Leftrightarrow I_1 + I_2 = \int_2^4 \frac{x+x^3}{1+x^2} dx \quad \text{cad} \quad I_1 + I_2 = \int_2^4 x dx.$$

Soit $h(x) = x$. h est continue sur $[2; 4]$. Elle admet donc des primitives sur $[2; 4]$ et par conséquent $I_1 + I_2$ existe.

$$I_1 + I_2 = \int_2^4 x dx \Leftrightarrow I_1 + I_2 = \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^4$$

$$\text{cad: } I_1 + I_2 = 6.$$

Ainsi: $I_1 + I_2 = 6$.

Et donc: $I_2 = 6 - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{17}{5}\right)$.