Maths Complémentaires Terminale

Calcul d'intégrales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CALCUL DE LA DÉRIVÉE D'UNE INTÉGRALE ? 2

CORRECTION

Calculons F' (x) sur $]\,0\,;+\infty\,[$:

Ici: $F(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x^2} \ln(t)\,dt.$

• Soit $f(t) = \ln(t)$. f est continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Elle admet donc des primitives sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et par conséquent: $\displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x^2} \ln(t)\,dt$ **existe**.

$F(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x^2} \ln(t)\,dt \iff F(x) = \Big[\, t \times \ln(t) - t \,\Big]_{\sqrt{x}}^{x^2}$

$\iff F(x) = (\, x^2 \times \ln(x^2) - x^2\,) - (\,\sqrt{x}\,\ln\sqrt{x} - \sqrt{x}\,)$

cad: $F(x) = 2x^2 \ln(x) - x^2 - \dfrac{1}{2}\sqrt{x}\,\ln(x) + \sqrt{x}$

$= (\,2x^2 - \dfrac{1}{2}\sqrt{x}\,) \times \ln(x) + (-\,x^2 + \sqrt{x}\,).$

• Soit $F(x) = (\,2x^2 - \dfrac{1}{2}\sqrt{x}\,) \times \ln(x) + (-\,x^2 + \sqrt{x}\,)$. F est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in]\,0\,;+\infty\,[$, nous pouvons calculer F'.

Pour tout $x \in]\,0\,;+\infty\,[$:

$$F'(x) = \left(4x - \frac{1}{4\sqrt{x}}\right) \times (\ln(x)) + \left(2x^2 - \frac{1}{2}\sqrt{x}\right) \times \left(\frac{1}{x}\right) + \left(-2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \left(4x - \frac{1}{4\sqrt{x}}\right) \times (\ln(x)) + \left(2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + \left(-2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \left(4x - \frac{1}{4\sqrt{x}}\right) \times (\ln(x)).$$

Ainsi, la dérivée de la fonction F sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ est:

$$F'(x) = \left(4x - \frac{1}{4\sqrt{x}}\right) \times (\ln(x)).$$