Maths Complémentaires Terminale

Calcul d'intégrales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ENCADREMENT 9

CORRECTION

1. Montrons que $I_1 = e - 2$:

Ici: $I_1 = \int_0^1 x\, e^{1-x}\, dx$, car $I_n = \int_0^1 x^n\, e^{1-x}\, dx$.

D'où: $I_1 = [\,(-1 - x)\, e^{1-x}\,]_0^1$, d'après l'énoncé

$= -2 \times e^0 - (-1 \times e^1)$

$= e - 2$.

Au total, nous avons bien: $I_1 = e - 2$.

2. Calculons I_2:

D'après l'énoncé: $I_{n+1} = (n + 1)\, I_n - 1$.

Dans ces conditions: $I_2 = (1 + 1)\, I_1 - 1$ cad $I_2 = 2e - 5$.

Ainsi: $I_2 = 2e - 5$.

3. Justifions que pour tout réel $x \in [\,0\,;\,1\,]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant x^n\, e^{1-x} \leqslant x^n\, e$:

Pour tout réel $x \in [\,0\,;\,1\,]$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leqslant x \leqslant 1$

$<=> \; -1 \leqslant -x \leqslant -0$

$<=> \; 1-1 \leqslant 1-x \leqslant 1-0$

$<=> \; 0 \leqslant 1-x \leqslant 1$

$<=> \; e^0 \leqslant e^{1-x} \leqslant e^1$

(car la fonction exponentielle est croissante)

$<=> \; 1 \leqslant e^{1-x} \leqslant e \quad (1)$.

En multipliant chaque membre de (1) par x^n qui est positif sur $[\,0\,;\,1\,]$,

nous obtenons: $(1) \; <=> \; x^n \times 1 \leqslant x^n \times e^{1-x} \leqslant x^n \times e$

$<=> \; 0 \leqslant x^n \leqslant x^n\, e^{1-x} \leqslant x^n\, e$, car: $x^n \geqslant 0$ sur $[\,0\,;\,1\,]$

$<=> \; 0 \leqslant x^n\, e^{1-x} \leqslant x^n\, e$.

Au total, pour réel $x \in [\,0\,;\,1\,]$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leqslant x^n\, e^{1-x} \leqslant x^n\, e$.

4. Démontrons que $\displaystyle\int_0^1 x^n\, e\, dx = \frac{e}{n+1}$:

Soit h, la fonction définie sur $[\,0\,;\,1\,]$ par: $h(x) = x^n\, e$.

La fonction h est continue sur $[\,0\,;\,1\,]$, elle admet donc des primitives sur $[\,0\,;\,1\,]$

et par conséquent: $\displaystyle\int_0^1 h(x)\, dx$ existe.

Ici: $\int_0^1 h(x)\, dx = \int_0^1 x^n\, e\, dx$

$= e \times \int_0^1 x^n\, dx$

$= e \times \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$

$= \frac{e}{n+1}.$

Au total, nous avons bien: $\int_0^1 x^n\, e\, dx = \frac{e}{n+1}.$

5. Déduisons-en que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \int_0^1 x^n\, e^{1-x}\, dx \leqslant \frac{e}{n+1}$.

Pour tout réel $x \in [\,0\,;\,1\,]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons:

- $g(x) = 0$,
- $f(x) = x\, e^{1-x}$,
- $h(x) = x^n\, e$.

Notons que:

- les fonctions g, f et h sont continues sur $[\,0\,;\,1\,]$,
- elles admettent donc des primitives sur $[\,0\,;\,1\,]$, et par conséquent:

$\int_0^1 g(x)\, dx$, $\int_0^1 f(x)\, dx$ et $\int_0^1 h(x)\, dx$ existent,

- de plus, les fonctions g, f et h sont positives sur $[\,0\,;\,1\,]$,
- enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Les conditions étant réunies, nous pouvons écrire:

$$0 \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant x^n e$$

$$\Longleftrightarrow \quad g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \int_0^1 g(x)\,dx \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \int_0^1 h(x)\,dx$$

$$\Longleftrightarrow \quad 0 \leqslant \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx \leqslant \int_0^1 x^n e\,dx$$

$$\Longleftrightarrow \quad 0 \leqslant \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx \leqslant \frac{e}{n+1}.$$

Au total, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leqslant \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx \leqslant \frac{e}{n+1}.$