Maths Complémentaires Terminale

Calcul d'intégrales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ENCADREMENT 8

CORRECTION

1. Montrons que $I_0 = \ln(2)$:

D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\, dx$.

Dans ces conditions: $I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\, dx$.

Soit h, la fonction définie sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ par: $h(x) = \frac{1}{1-x}$.

La fonction h est continue sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ (avec $1 - x \neq 0$), elle admet donc des primitives sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ et par conséquent: I_0 existe.

Ici: $I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\, dx$

$= -\left[\ln(1-x)\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$= -\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln(1)\right)$

$$= -\ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{ou} \quad I_0 = \ln(2).$$

Donc nous avons bien: $I_0 = \ln(2)$.

2\. a. Calculons $I_0 - I_1$:

$$I_0 - I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\,dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{1-x}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 1 \cdot dx$$

$$= \left[\, x \,\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

Au total: $I_0 - I_1 = \frac{1}{2}$.

2\. b. Déduisons-en I_1:

Nous savons que:
- $I_0 = \ln(2)$
- $I_0 - I_1 = \frac{1}{2}$.

D'où: $I_1 = I_0 - \frac{1}{2}$ cad $I_1 = -\frac{1}{2} + \ln(2)$.

Ainsi: $I_1 = -\frac{1}{2} + \ln(2)$.

3\. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n - I_{n+1} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n - I_{n+1} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{n+1}}{1-x}\,dx$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x^n - x^{n+1}}{1-x} \right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n \times (1-x)}{(1-x)}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} x^n\,dx$$

$$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^{\frac{1}{2}} \quad \text{cad} \quad I_n - I_{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}.$$

Au total, nous avons bien, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n - I_{n+1} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$.

4. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,dx \leqslant \frac{1}{2^n}$:

Pour tout réel $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons :
- $g(x) = 0$,
- $f(x) = \dfrac{x^n}{1-x}$,
- $h(x) = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Notons que : • les fonctions g, f et h sont continues sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$,

- elles admettent donc des primitives sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, et par conséquent:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} g(x)\,dx,\ \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx \text{ et } \int_0^{\frac{1}{2}} h(x)\,dx \text{ existent,}$$

- de plus, les fonctions g, f et h sont positives sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$,

- enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Les conditions étant réunies, nous pouvons écrire:

$$0 \leqslant \frac{x^n}{1-x} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\Longleftrightarrow\ g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$$

$$\Longleftrightarrow\ \int_0^{\frac{1}{2}} g(x)\,dx \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} h(x)\,dx$$

$$\Longleftrightarrow\ 0 \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x^n}{1-x}\right) dx \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) dx$$

$$\Longleftrightarrow\ 0 \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x^n}{1-x}\right) dx \leqslant \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times x\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\Longleftrightarrow\ 0 \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x^n}{1-x}\right) dx \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Au total, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x^n}{1-x}\right) dx \leqslant \frac{1}{2^n}.$