Maths Complémentaires Terminale

Calcul d'intégrales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ENCADREMENT 4

CORRECTION

1. Déterminons les constantes réelles C_1 et C_2:

D'après l'énoncé: • $I_n = \int_0^1 \left(\frac{x^n}{1 + 2x + 4x^2} \right) dx$, avec $n \in \mathbb{N}^*$

• $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Dans ces conditions sur $[0; 1]$: $0 \leqslant x \leqslant 1$

$\iff$ $0 \leqslant 2x + 4x^2 \leqslant 6$

$\iff$ $1 + 0 \leqslant 1 + 2x + 4x^2 \leqslant 1 + 6$

$\iff$ $1 \leqslant 1 + 2x + 4x^2 \leqslant 7$

$\iff$ $\frac{1}{7} \leqslant \frac{1}{1 + 2x + 4x^2} \leqslant \frac{1}{1}$

$\iff$ $C_1 \leqslant \frac{1}{1 + 2x + 4x^2} \leqslant C_2$.

Ainsi, les constantes réelles C_1 et C_2 demandées sont: $C_1 = \frac{1}{7}$ et $C_2 = 1$.

2. Déduisons-en un encadrement de I_n sur $[0; 1]$:

D'après la question précédente, pour tout $x \in [0; 1]$:

$$\frac{1}{7} \leqslant \frac{1}{1 + 2x + 4x^2} \leqslant 1. \quad (1)$$

En multipliant chaque membre de l'inégalité (1) par $x^n \geqslant 0$ sur $[0; 1]$, nous obtenons:

$$\frac{x^n}{7} \leqslant \frac{x^n}{1 + 2x + 4x^2} \leqslant x^n.$$

Posons pour tout $x \in [0; 1]$:
- $g(x) = \dfrac{x^n}{7}$,
- $f(x) = \dfrac{x^n}{1 + 2x + 4x^2}$,
- $h(x) = x^n$.

Notons que:
- les fonctions g, f et h sont continues sur $[0; 1]$,
- elles admettent donc des primitives sur $[0; 1]$, et par conséquent:

$$\int_0^1 g(x)\,dx,\ \int_0^1 f(x)\,dx \text{ et } \int_0^1 h(x)\,dx \text{ existent,}$$

- de plus, les fonctions g, f et h sont positives sur $[0; 1]$,
- enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Les conditions étant réunies, nous pouvons écrire:

$$\frac{x^n}{7} \leqslant \frac{x^n}{1+2x+4x^2} \leqslant x^n$$

$$\iff g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$$

$$\iff \int_0^1 g(x)\,dx \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \int_0^1 h(x)\,dx$$

$$\iff \int_0^1 \left(\frac{x^n}{7}\right) dx \leqslant \int_0^1 \left(\frac{x^n}{1+2x+4x^2}\right) dx \leqslant \int_0^1 x^n\,dx$$

$$\iff \frac{1}{7} \times \left[\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)}\right]_0^1 \leqslant I_n \leqslant \left[\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)}\right]_0^1$$

$$\iff \frac{1}{7\,(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{(n+1)}.$$

Au total un encadrement de I_n sur $[\,0\,;\,1\,]$ est: $\dfrac{1}{7\,(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{(n+1)}$.