

www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

Calcul d'intégrales



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ENCADREMENT

3

CORRECTION

Déterminons un encadrement de I sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$:

D'après l'énoncé: $\bullet I = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx$

$\bullet 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Dans ces conditions sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$: $0 \leq x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow 1+0 \leq 1+x^2 \leq 1+\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 1+x^2 \leq \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1.$$

Posons pour tout $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$:

- $g(x) = \frac{2}{\sqrt{5}}$,

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

- $h(x) = 1$.

Notons que :

- les fonctions g , f et h sont continues sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$,

- elles admettent donc des primitives sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$,
et par conséquent :

$\int_0^{\frac{1}{2}} g(x) dx$, $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$ et $\int_0^{\frac{1}{2}} h(x) dx$ existent,

- de plus, les fonctions g , f et h sont positives sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$,

- enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Les conditions étant réunies, nous pouvons écrire :

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} g(x) dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} h(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{5}} dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} 1 x dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} \left[x \right]_0^{\frac{1}{2}} \leq I \leq \left[x \right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} \leq I \leq \frac{1}{2}.$$

Au total un encadrement de I sur $\left[0; \frac{1}{2} \right]$ est: $\frac{1}{\sqrt{5}} \leq I \leq \frac{1}{2}$.