Maths Complémentaires Terminale

Calcul d'intégrales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

a, b ? ET VALEUR MOYENNE

5

CORRECTION

1. Écrivons f sous la forme $f(x) = \dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{(x-1)}$:

Pour tout $x \in [2; 4]$: $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x-1)^2}$.

Dans ces conditions: $f(x) = \dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{(x-1)}$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+1}{(x-1)^2} = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+1}{(x-1)^2} = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = a + bx - b$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = bx + (-a - b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = b \\ 1 = a - b \end{cases}$$

cad: $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$.

Ainsi, pour tout $x \in [\,2\,;\,4\,]$: $f(x) = \dfrac{3}{(x-1)^2} + \dfrac{2}{(x-1)}$.

2. Calculons alors $I = \int_2^4 f(x)\,dx$:

Ici: $I = \int_2^4 \left(\dfrac{3}{(x-1)^2} + \dfrac{2}{(x-1)} \right) dx$.

Soit $f(x) = \dfrac{3}{(x-1)^2} + \dfrac{2}{(x-1)}$. f est continue sur $[\,2\,;\,4\,]$. Elle admet donc des primitives sur $[\,2\,;\,4\,]$ et par conséquent I **existe**.

$$I = \int_2^4 \left(\frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)} \right) dx \iff I = 3 \times \int_2^4 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + 2 \times \int_2^4 \frac{1}{(x-1)}\,dx$$

$$\iff I = 3 \times \left[\frac{-1}{(x-1)} \right]_2^4 + 2 \times \left[\ln(x-1) \right]_2^4$$

$$\iff I = -3 \times \left(\frac{1}{3} - 1 \right) + 2 \times (\ln 3 - \ln 1)$$

cad: $I = 2 + 2\ln 3$.

Ainsi: $I = 2 + 2\ln 3$.

3. Déduisons-en la valeur moyenne de f sur $[\,2\,;\,4\,]$:

La valeur moyenne de f sur $[\,2\,;\,4\,]$ correspond au nombre μ tel que:

$$\mu = \left(\frac{1}{4-2} \right) \times \int_2^4 f(x)\,dx.$$

Ici, nous avons donc: $\mu = \left(\frac{1}{4-2}\right) \times \left(2 + 2\ln 3\right)$

cad: $\mu = 1 + \ln 3$.

Ainsi, la valeur moyenne de f sur $[\,2\,;\,4\,]$ est: $\mu = 1 + \ln 3$.