Maths Complémentaires Terminale

Calcul d'intégrales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

a, b ? ET VALEUR MOYENNE

4

CORRECTION

1. Écrivons f sous la forme $f(x) = \dfrac{a}{(x-4)} + \dfrac{b}{(x-1)}$:

Pour tout $x \in [5; 6]$: $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 4}$.

Préalablement, notons que: $(x-4) \times (x-1) = x^2 - 5x + 4$.

Dans ces conditions: $f(x) = \dfrac{a}{(x-4)} + \dfrac{b}{(x-1)}$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{x^2 - 5x + 4} = \frac{a}{(x-4)} + \frac{b}{(x-1)}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{x^2 - 5x + 4} = \frac{a(x-1) + b(x-4)}{x^2 - 5x + 4}$$

$$\Longleftrightarrow 1 = (a+b)x + (-a - 4b)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 0 = a + b \\ 1 = -a - 4b \end{cases}$$

cad: $\begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

Ainsi, pour tout $x \in [\,5\,;6\,]$: $f\,(x) = \dfrac{\frac{1}{3}}{(x-4)} + \dfrac{\left(-\frac{1}{3}\right)}{(x-1)}$.

2. Calculons alors $I = \displaystyle\int_5^6 f\,(x)\,dx$:

Ici: $I = \displaystyle\int_5^6 \left(\dfrac{\frac{1}{3}}{(x-4)} + \dfrac{\left(-\frac{1}{3}\right)}{(x-1)}\right) dx$.

Soit $f\,(x) = \dfrac{\frac{1}{3}}{(x-4)} - \dfrac{\frac{1}{3}}{(x-1)}$. f est continue sur $[\,5\,;6\,]$. Elle admet donc des primitives sur $[\,5\,;6\,]$ et par conséquent I **existe**.

$$I = \int_5^6 \left(\frac{\frac{1}{3}}{(x-4)} - \frac{\frac{1}{3}}{(x-1)}\right) dx \iff I = \frac{1}{3} \times \int_5^6 \frac{1}{(x-4)}\,dx - \frac{1}{3} \times \int_5^6 \frac{1}{(x-1)}\,dx$$

$$\iff I = \frac{1}{3} \times [\,\ln(x-4)\,]_5^6 - \frac{1}{3} \times [\,\ln(x-1)\,]_5^6$$

$$\iff I = \frac{1}{3} \times (\ln 2 - \ln 1) - \frac{1}{3} \times (\ln 5 - \ln 4)$$

cad: $I = \dfrac{1}{3}\,(\ln 2 - \ln 5 + \ln 4)$.

Ainsi: $I = \frac{1}{3}(\ln 2 - \ln 5 + \ln 4)$ ou $I = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{8}{5}\right)$.

3. **Déduisons-en la valeur moyenne de f sur $[5 ; 6]$:**

La valeur moyenne de f sur $[5 ; 6]$ correspond au nombre μ tel que:

$$\mu = \left(\frac{1}{6-5}\right) \times \int_5^6 f(x)\,dx.$$

Ici, nous avons donc: $\mu = \left(\frac{1}{6-5}\right) \times \left(\frac{1}{3}\ln\left(\frac{8}{5}\right)\right)$

cad: $\mu = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{8}{5}\right)$.

Ainsi, la valeur moyenne de f sur $[5 ; 6]$ est: $\mu = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{8}{5}\right)$.