

www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

Calcul d'intégrales



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

a, b ? ET VALEUR MOYENNE

3

CORRECTION

1. Écrivons f sous la forme $f(x) = \frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{(2x-1)}$:

Pour tout $x \in [4; 6]$: $f(x) = \frac{3x+1}{2x^2-3x+1}$.

Préalablement, notons que: $(x-1) \times (2x-1) = 2x^2 - x - 2x + 1$
 $= 2x^2 - 3x + 1$.

Dans ces conditions: $f(x) = \frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{(2x-1)}$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+1}{2x^2-3x+1} = \frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{(2x-1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+1}{2x^2-3x+1} = \frac{a(2x-1)+b(x-1)}{2x^2-3x+1}$$

$$\Leftrightarrow 3x+1 = 2ax - a + bx - b$$

$$\Leftrightarrow 3x+1 = (2a+b)x + (-a-b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 2a+b \\ 1 = -a-b \end{cases}$$

$$\text{cad: } \begin{cases} a = 4 \\ b = -5 \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $x \in [4; 6]$: $f(x) = \frac{4}{(x-1)} + \frac{(-5)}{(2x-1)}$.

2. Calculons alors $I = \int_4^6 f(x) dx$:

Ici: $I = \int_4^6 \left(\frac{4}{(x-1)} - \frac{5}{(2x-1)} \right) dx$.

Soit $f(x) = \frac{4}{(x-1)} - \frac{5}{(2x-1)}$. f est continue sur $[4; 6]$. Elle admet donc

des primitives sur $[4; 6]$ et par conséquent I existe.

$$I = \int_4^6 \left(\frac{4}{(x-1)} - \frac{5}{(2x-1)} \right) dx \Leftrightarrow I = 4 \times \int_4^6 \frac{1}{(x-1)} dx - 5 \times \int_4^6 \frac{1}{(2x-1)} dx$$

$$\Leftrightarrow I = 4 \times \left[\ln(x-1) \right]_4^6 - 5 \times \left[\frac{\ln(2x-1)}{2} \right]_4^6$$

$$\Leftrightarrow I = 4 \times (\ln 5 - \ln 3) - \frac{5}{2} \times (\ln 11 - \ln 7)$$

cad: $I = 4 \ln \left(\frac{5}{3} \right) - \frac{5}{2} \ln \left(\frac{11}{7} \right)$.

Ainsi: $I = 4 \ln \left(\frac{5}{3} \right) - \frac{5}{2} \ln \left(\frac{11}{7} \right)$.

3. Dédouons-en la valeur moyenne de f sur $[4; 6]$:

La valeur moyenne de f sur $[4; 6]$ correspond au nombre μ tel que:

$$\mu = \left(\frac{1}{6-4} \right) \times \int_4^6 f(x) dx.$$

Ici, nous avons donc: $\mu = \left(\frac{1}{6-4} \right) \times \left(4 \ln \left(\frac{5}{3} \right) - \frac{5}{2} \ln \left(\frac{11}{7} \right) \right)$

cad: $\mu = 2 \ln \left(\frac{5}{3} \right) - \frac{5}{2} \ln \left(\frac{11}{7} \right).$

Ainsi, la valeur moyenne de f sur $[4; 6]$ est: $\mu = 2 \ln \left(\frac{5}{3} \right) - \frac{5}{2} \ln \left(\frac{11}{7} \right).$