Maths Complémentaires Terminale

Calcul d'intégrales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

a, b ? ET VALEUR MOYENNE 2

CORRECTION

1. Écrivons f sous la forme $f(x) = \frac{a}{(x-2)} + \frac{b}{(x+3)}$:

Pour tout $x \in [0; 3]$: $f(x) = \frac{3x+2}{x^2+x-6}$.

Préalablement, notons que: $(x-2) \times (x+3) = x^2 + x - 6$.

Dans ces conditions: $f(x) = \frac{a}{(x-2)} + \frac{b}{(x+3)}$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+2}{x^2+x-6} = \frac{a}{(x-2)} + \frac{b}{(x+3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+2}{x^2+x-6} = \frac{a(x+3) + b(x-2)}{x^2+x-6}$$

$$\Leftrightarrow 3x + 2 = ax + 3a + bx - 2b$$

$$\Leftrightarrow 3x + 2 = (a+b)x + (3a-2b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = a + b \\ 2 = 3a - 2b \end{cases}$$

cad: $\begin{cases} a = \dfrac{8}{5} \\ b = \dfrac{7}{5} \end{cases}$.

Ainsi, pour tout $x \in [\,0\,;3\,]$: $f(x) = \dfrac{\frac{8}{5}}{(x-2)} + \dfrac{\frac{7}{5}}{(x+3)}$.

2. Calculons alors $I = \displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$:

Ici: $I = \displaystyle\int_0^3 \left(\dfrac{\frac{8}{5}}{(x-2)} + \dfrac{\frac{7}{5}}{(x+3)}\right) dx$.

Soit $f(x) = \dfrac{\frac{8}{5}}{(x-2)} + \dfrac{\frac{7}{5}}{(x+3)}$. f est continue sur $[\,0\,;3\,]$. Elle admet donc des primitives sur $[\,0\,;3\,]$ et par conséquent I **existe**.

$$I = \int_0^3 \left(\frac{\frac{8}{5}}{(x-2)} + \frac{\frac{7}{5}}{(x+3)}\right) dx \iff I = \frac{8}{5} \times \int_0^3 \frac{1}{(x-2)}\,dx + \frac{7}{5} \times \int_0^3 \frac{1}{(x+3)}\,dx$$

$$\iff I = \frac{8}{5} \times [\,\ln|x-2|\,]_0^3 + \frac{7}{5} \times [\,\ln|x+3|\,]_0^3$$

$$\iff I = \frac{8}{5} \times (\ln 1 - \ln 2) + \frac{7}{5} \times (\ln 6 - \ln 3)$$

cad: $I = -\dfrac{8}{5}\ln(2) + \dfrac{7}{5}\ln(2)$.

Ainsi: $I = -\frac{8}{5}\ln(2) + \frac{7}{5}\ln(2)$ ou $I = -\frac{\ln(2)}{5}$.

3. Déduisons-en la valeur moyenne de f sur $[0;3]$:

La valeur moyenne de f sur $[0;3]$ correspond au nombre μ tel que:

$$\mu = \left(\frac{1}{3-0}\right) \times \int_0^3 f(x)\,dx.$$

Ici, nous avons donc: $\mu = \left(\frac{1}{3-0}\right) \times \left(-\frac{\ln(2)}{5}\right)$

cad: $\mu = -\frac{\ln(2)}{15}$.

Ainsi, la valeur moyenne de f sur $[0;3]$ est: $\mu = -\frac{\ln(2)}{15}$.