

www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

Calcul d'intégrales



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

a, b, c ? ET VALEUR MOYENNE

3

CORRECTION

1. Écrivons f sous la forme $f(x) = \frac{a}{(x-2)} + \frac{b}{(x-1)} + \frac{c}{(x+3)}$:

Pour tout $x \in [3; 6]$: $f(x) = \frac{1}{x^3 - 7x + 6}$.

Préalablement, notons que: $(x-2) \times (x-1) \times (x+3) = (x^2 - 3x + 2) \times (x+3)$

$$= x^3 + 3x^2 - 3x^2 - 9x + 2x + 6$$

$$= x^3 - 7x + 6.$$

Dans ces conditions: $f(x) = \frac{a}{(x-2)} + \frac{b}{(x-1)} + \frac{c}{(x+3)}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2 - 7x + 6} = \frac{a(x-1)(x+3) + b(x-2)(x+3) + c(x-2)(x-1)}{x^2 - 7x + 6}$$

$$\Leftrightarrow 1 = (a+b+c)x^2 + (2a+b-3c)x + (-3a-6b+2c)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = a + b + c \\ 0 = 2a + b - 3c \\ 1 = -3a - 6b + 2c \end{cases}$$

$$\text{cad: } \begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ b = -\frac{1}{4} \\ c = \frac{1}{20} \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, pour tout } x \in [3; 6]: f(x) = \frac{\frac{1}{5}}{(x-2)} + \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)}{(x-1)} + \frac{\frac{1}{20}}{(x+3)}$$

2. Calculons alors $I = \int_3^6 f(x) dx$:

$$\text{Ici: } I = \int_3^6 \left(\frac{\frac{1}{5}}{(x-2)} + \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)}{(x-1)} + \frac{\frac{1}{20}}{(x+3)} \right) dx.$$

Soit $f(x) = \frac{\frac{1}{5}}{(x-2)} - \frac{\frac{1}{4}}{(x-1)} + \frac{\frac{1}{20}}{(x+3)}$. f est continue sur $[3; 6]$. Elle admet

donc des primitives sur $[3; 6]$ et par conséquent I existe.

$$I = \int_3^6 \left(\frac{\frac{1}{5}}{(x-2)} - \frac{\frac{1}{4}}{(x-1)} + \frac{\frac{1}{20}}{(x+3)} \right) dx$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{1}{5} \times \int_3^6 \frac{1}{(x-2)} dx - \frac{1}{4} \times \int_3^6 \frac{1}{(x-1)} dx + \frac{1}{20} \times \int_3^6 \frac{1}{(x+3)} dx$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{1}{5} \times \left[\ln(x-2) \right]_3^6 - \frac{1}{4} \times \left[\ln(x-1) \right]_3^6 + \frac{1}{20} \times \left[\ln(x+3) \right]_3^6$$

cad: $I = \frac{1}{5} \ln 4 - \frac{1}{4} \ln \left(\frac{5}{2} \right) + \frac{1}{20} \ln \left(\frac{3}{2} \right)$.

Ainsi: $I = \frac{1}{5} \ln 4 - \frac{1}{4} \ln \left(\frac{5}{2} \right) + \frac{1}{20} \ln \left(\frac{3}{2} \right)$.

3. Déduisons-en la valeur moyenne de f sur $[3; 6]$:

La valeur moyenne de f sur $[3; 6]$ correspond au nombre μ tel que:

$$\mu = \left(\frac{1}{6-3} \right) \times \int_3^6 f(x) dx.$$

Ici, nous avons donc: $\mu = \left(\frac{1}{6-3} \right) \times \left(\frac{1}{5} \ln 4 - \frac{1}{4} \ln \left(\frac{5}{2} \right) + \frac{1}{20} \ln \left(\frac{3}{2} \right) \right)$

cad: $\mu = \frac{1}{15} \ln 4 - \frac{1}{12} \ln \left(\frac{5}{2} \right) + \frac{1}{60} \ln \left(\frac{3}{2} \right)$.

Ainsi, la valeur moyenne de f sur $[3; 6]$ est: $\mu = \frac{1}{15} \ln 4 - \frac{1}{12} \ln \left(\frac{5}{2} \right) + \frac{1}{60} \ln \left(\frac{3}{2} \right)$.