Maths Complémentaires Terminale

Convexité & Concavité

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

POINT D'INFLEXION 6

CORRECTION

1. **Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$:**

Ici: $f(x) = 5x^2 e^x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

D'après l'énoncé f est **deux fois dérivables** sur $\mathbb{R}$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' et f'' pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- $f'(x) = (10x) \times (e^x) + (5x^2) \times (e^x)$

$$= (5x^2 + 10x)\, e^x.$$

- $f''(x) = (10x + 10) \times (e^x) + (5x^2 + 10x) \times (e^x)$

$$= (5x^2 + 20x + 10)\, e^x.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = (5x^2 + 10x)\, e^x \quad \text{et} \quad f''(x) = (5x^2 + 20x + 10)\, e^x.$$

2. **La courbe représentative de f admet-elle un point d'inflexion ?**

Soient f une fonction définie et deux fois dérivables sur un intervalle I et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

Soit " a " un réel appartenant à I.

Si f'' s'annule et change de signe en a, alors $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse: $x = a$.

Ici, pour tout $x \in I\!R$: $f''(x) = 5e^x (x^2 + 4x + 2)$.

Soit l'équation: $x^2 + 4x + 2 = 0$.

$\Delta = (2\sqrt{2})^2 > 0$.

D'où deux solutions: $x' = -2 - \sqrt{2}$ et $x'' = -2 + \sqrt{2}$.

Nous allons donc distinguer 2 cas pour tout $x \in I\!R$, sachant que: $5e^x > 0$.

• 1er cas: $f''(x) \geqslant 0$.

$f''(x) \geqslant 0$ ssi $x^2 + 4x + 2 \geqslant 0$

cad ssi: $x \in]-\infty ; -2 - \sqrt{2}] \cup [-2 + \sqrt{2} ; +\infty[$.

• 2e cas: $f''(x) \leqslant 0$.

$f''(x) \leqslant 0$ ssi $x^2 + 4x + 2 \leqslant 0$

cad ssi: $x \in [-2 - \sqrt{2} ; -2 + \sqrt{2}]$.

Dans ces conditions, f'' s'annule en changeant de signe en deux points d'abscisses: • $x = -2 - \sqrt{2}$ et • $x = -2 + \sqrt{2}$.

Soient f une fonction définie et deux fois dérivables sur un intervalle I et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

Soit " a " un réel appartenant à I.

Si f'' s'annule et change de signe en a, alors $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse: $x = a$.

Ici, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f''(x) = 5e^x (x^2 + 4x + 2)$.

Soit l'équation: $x^2 + 4x + 2 = 0$.

$\Delta = (2\sqrt{2})^2 > 0$.

D'où deux solutions: $x' = -2 - \sqrt{2}$ et $x'' = -2 + \sqrt{2}$.

Nous allons donc distinguer 2 cas pour tout $x \in \mathbb{R}$, sachant que: $5e^x > 0$.

- 1er cas: $f''(x) \geqslant 0$.

$f''(x) \geqslant 0$ ssi $x^2 + 4x + 2 \geqslant 0$

cad ssi: $x \in \left]-\infty ; -2 - \sqrt{2}\right] \cup \left[-2 + \sqrt{2} ; +\infty\right[$.

- 2e cas: $f''(x) \leqslant 0$.

$f''(x) \leqslant 0$ ssi $x^2 + 4x + 2 \leqslant 0$

cad ssi: $x \in \left[-2 - \sqrt{2} ; -2 + \sqrt{2}\right]$.

Dans ces conditions, f'' s'annule en changeant de signe en deux points d'abscisses: • $x = -2 - \sqrt{2}$ et • $x = -2 + \sqrt{2}$.

Ainsi, la courbe $\mathscr{C}$ admet deux points d'inflexion ayant pour abscisses respectifs:

$$x = -2 - \sqrt{2} \quad \text{et} \quad x = -2 + \sqrt{2}.$$